DIE

APERIODISCHE BEWEGUNG

GEDÄMPFTER MAGNETE

VON

E. du Bois-Reymond.

[AUS DEM MONATSBERICHT DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN.]

BERLIN.

BUCHDRUCKEREI DER KGL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN (G. VOGT),
UNIVERSITÄTSTR. 8.
1870.

Inhalt.

5. August 1869. Gesammtsitzung der Akademie.

Hr. du Bois-Reymond las über die aperiodische Bewegung gedämpfter Magnete.

§. I. Einleitung.

In seiner „Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel"[1]) stellt Gauss für die Bewegung eines in dämpfender Umgebung schwingenden Magnetes die Fundamentalgleichung auf

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + n^2(x - p) + 2\varepsilon\frac{dx}{dt}, \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

wo x den dem Stand des Magnetes zur Zeit t, p den seinem Ruhestand entsprechenden Scalentheil, n^2 die magnetische Richtkraft (für die Einheit der Ablenkung) und 2ε die verzögernde Kraft der Dämpfung (für die Einheit der Geschwindigkeit), beide mit dem Trägheitsmoment des Magnetes dividirt, bedeuten. Das Integral dieser Gleichung giebt Gauss unter der Form

$$x = p + Ae^{-\varepsilon t}\sin\left\{\sqrt{n^2 - \varepsilon^2}.(t - B)\right\}, \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist, A und B die beiden durch die Integration eingeführten willkürlichen Constanten vorstellen. Ohne die verzögernde Kraft der Dämpfung ist nach Gauss das Integral

$$x = p + A \,.\, \sin\left\{n(t - B)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

---

[1]) Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837. Göttingen 1838. S. 58; — C. F. Gauss Werke u. s. w. Göttingen 1867. 4°. Bd. V. S. 374.

Nachdem Gauss aus Gleichung (I) die Theorie der Schwingungsbewegung gedämpfter Magnete hergeleitet hat, sagt er: „Bei allem, was bisher entwickelt ist, liegt die Voraus„setzung zum Grunde, dafs ε kleiner sei als n; im entgegen„gesetzten Fall nimmt das Integral der Fundamentalgleichung „eine andere Form an. Man erhält nämlich anstatt des Glie„des $Ae^{-\varepsilon t}\sin\left\{\sqrt{n^2-\varepsilon^2}\,.\,(t-B)\right\}$, in dem Fall, wo ε gröfser „ist als n, zwei Glieder von der Form

$$Ae^{-(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-n^2})t}+Be^{-(\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2-n^2})t} \quad . \quad . \quad \text{(IV)}$$

„und in dem Fall, wo $\varepsilon = n$ ist, von dieser

$$(A+Bt)\,e^{-\varepsilon t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(V)}$$

„In beiden Fällen findet also in der Bewegung gar nichts „periodisches mehr Statt, sondern der Stand nähert sich asymp„totisch dem Ruhestande. Für unsern Dämpfer ist $\frac{\varepsilon}{n} = 0{,}22152$, „und es müfste also ein mehr als $4\frac{1}{2}$mal stärker wirkender „Dämpfer angewandt werden, um solchen Erfolg hervorzu„bringen. Offenbar aber würde es dazu nicht hinreichend sein, „die Metallmenge nur in demselben Verhältnifs zu vergröfsern, „in sofern diese Vergröfserung nach aufsen angebracht werden „müfste, und die äufsern Schichten des Metallrahmens verglei„chungsweise weniger zur Inductionswirkung beitragen als die „innern. Allein es würde nicht einmal anzurathen sein, eine „Dämpfung von einer solchen Stärke anzuwenden, dafs die Be„wegung aufhörte periodisch zu sein, theils weil, sobald ε den „Grenzwerth n überschreitet, die Annäherung an den Ruhestand „wieder langsamer geschieht, theils weil man dann den we„sentlichen Vortheil verlöre, aus zwei beliebigen, um T_1" — die Schwingungsdauer des gedämpften Magnetes — „von einan„der entfernten Aufzeichnungen den Ruhestand auf eine be„queme Art berechnen zu können."

So weit Gauss. Er hat den aperiodischen oder schwingungslosen Zustand gedämpfter Magnete, wie man ihn nennen kann, mit geistigem Auge gesehen, ohne ihn wirklich zu beobachten, und seine Andeutungen darüber sind meines Wissens mehr als dreifsig Jahre unbeachtet geblieben, obschon

sie, wie sich zeigen wird, den Keim einer interessanten Theorie und, Gauss Meinung zuwider, eines praktisch wichtigen Verfahrens enthielten. Ich habe gefunden, dafs jener Zustand sich leicht verwirklichen läfst; und noch Jedem, der von der aperiodischen Bewegung meiner Bussolspiegel Zeuge war, sprang der Vortheil in die Augen, der daraus bei vielen Arten galvanometrischer Versuche erwachsen müsse.

Da die Darstellung, deren sich Gauss im Obigen bedient, den Punkt, auf den es hier ankommt, nicht mit voller Klarheit hervortreten läfst, so wird es angemessen sein, die Theorie der aperiodischen Bewegung gedämpfter Magnete zunächst etwas ausführlicher zu entwickeln.

§. II. Allgemeine Gleichung der Bewegung gedämpfter Magnete, und periodische Bewegung solcher Magnete.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dafs die Ruhelage des Magnetes dem Nullpunkt der Theilung entspreche, also $p = 0$ sei. Indem man sonst die Gauss'schen Bezeichnungen beibehält, aber zur Abkürzung einen der beiden Werthe von

$$\sqrt{\varepsilon^2 - n^2} = r$$

setzt, erhält man als allgemeines vollständiges Integral der Differentialgleichung (I) die Gleichung

$$x = e^{-\varepsilon t}(Ae^{-rt} + Be^{rt})\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VI)}$$

deren rechte Seite mit (IV) identisch ist.

Zur Bestimmung der Constanten A und B dienen Annahmen über Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit des Magnetes. Denken wir uns den Magnet durch eine äufsere Kraft, z. B. durch einen beständigen elektrischen Strom, in der Ablenkung ξ gehalten, die aber nicht gröfser sei, als dafs nicht die Proportionalität zwischen Ablenkung und Richtkraft noch angenommen werden dürfe, und die Dämpfung merklich den gleichen Werth behalte. Im Augenblick $t = 0$ werde die Kette geöffnet, und der Magnet gleichsam seiner Ruhelage zu fallen gelassen. Für $t = 0$ haben wir dann $x = \xi$ und $\frac{dx}{dt} = 0$. Man findet

$$A = -\frac{\xi(\varepsilon - r)}{2r},$$

$$B = +\frac{\xi(\varepsilon + r)}{2r},$$

und Gleichung (VI) wird

$$x = \frac{\xi}{2r} \cdot e^{-\varepsilon t} \{(\varepsilon + r)\, e^{rt} - (\varepsilon - r)\, e^{-rt}\} \quad . \quad . \quad \text{(VII)}$$

Die Art der Bewegung des Magnetes, welche durch die Gleichungen (VI) und (VII) dargestellt wird, ist verschieden je nach der Beschaffenheit der Wurzelgröfse r.

Ist $\varepsilon < n$, so ist $r = i\varrho$, wenn wir $\sqrt{-1}$ mit i, und einen der beiden Werthe von $\sqrt{n^2 - \varepsilon^2}$ mit ϱ bezeichnen. Gleichung (VI) geht dann unmittelbar über in

$$x = e^{-\varepsilon t} \{(A + B) \cos(\varrho t) - i\,(A - B) \sin(\varrho t)\}, \quad \text{(VIII)}$$

oder, wenn den Constanten A und B ihr Werth ertheilt wird, in

$$x = \xi \cdot e^{-\varepsilon t} \left\{ \cos(\varrho t) + \frac{\varepsilon}{\varrho} \sin(\varrho t) \right\} . \quad . \quad . \quad \text{(IX)}$$

Diese Gleichungen zeigen eine Schwingungsbewegung des Magnetes an, bei der die Amplitude der Schwingungen in einer geometrischen Reihe abnimmt, die bekannte Bewegungsart gedämpfter Magnete. Der Magnet geht durch den Nullpunkt jedesmal dafs

$$\operatorname{tg}(\varrho t) = -\frac{\varrho}{\varepsilon},$$

und erreicht seine gröfste Elongation jedesmal dafs

$$\sin(\varrho t) = 0.$$

Bestimmt man eine Winkelgröfse ϕ durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}(\varrho \phi) = -\frac{\varrho}{\varepsilon},$$

so wird Gleichung (IX)

$$x = \xi \cdot e^{-\varepsilon t} \left[\frac{n}{\varrho} \sin\{\varrho(t - \phi)\} \right] \quad . \quad . \quad . \quad \text{(X)}$$

Der von der eckigen Klammer umfaſste Factor in dieser Gleichung entspricht dem periodischen Factor in (IX), verschwindet für $\operatorname{tg}(\varrho t) = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$ und wird $= 1$ für $\sin(\varrho t) = 0$.

Abgesehen von der von uns vorgenommenen Constantenbestimmung, ist Gleichung (X) einerlei mit (II), oder von der Form, in welcher Gauss das Integral der Fundamentalgleichung unter der stillschweigenden Voraussetzung hingestellt hat, daſs $\varepsilon < n$ sei; während er der allgemeinen und ursprünglichen Form des Integrals, nämlich der Gleichung (VI), aus der (II) erst durch eine allerdings geläufige Umformung hervorgeht, erst später bei Erwägung der Möglichkeit, daſs $\varepsilon > n$ werde, gedenkt. Was Gauss bewog, die umgeformte Gleichung (II) voranzustellen, ist sichtlich der Umstand, daſs in dieser Gestalt die Gleichung sich an die (III) anschlieſst, welche die Bewegung des Magnetes ohne Dämpfung darstellt. Setzt man in der Fundamentalgleichung $\varepsilon = 0$, wodurch der die Dämpfung ausdrückende Term verschwindet, so erhält man als allgemeines vollständiges Integral den von Gauss gegebenen Ausdruck (III), und unter denselben Annahmen über Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit, die wir für den Fall der Dämpfung gemacht haben, und für $p = 0$,

$$A = -\xi, \qquad B = \frac{\pi}{2n},$$

$$x = \xi \,.\, \sin\left(\frac{\pi}{2} - nt\right) = \xi \,.\, \cos(nt), \quad . \quad . \quad \text{(XI)}$$

wo π in üblicher Bedeutung genommen ist. Die Vergleichung der Ausdrücke (II) und (III), oder (X) und (XI), läſst den Einfluſs der Dämpfung auf die Schwingungsbewegung klar übersehen, der sich theils in dem Auftreten des die Amplituden vermindernden Factors $e^{-\varepsilon t}$, theils in dem langsameren Wachsen des Argumentes der periodischen Function ausspricht, wodurch eine gröſsere Schwingungsdauer angezeigt wird. Da es Gauss zunächst auf diesen Vergleich ankam, der Fall $\varepsilon > n$ ihm dagegen nur als theoretisches Curiosum vorschwebte, durfte es ihm gleichgültig sein, daſs bei seiner Darstellung

der unmittelbare Einblick in den Übergang der periodischen zur aperiodischen Bewegung, der bei $\varepsilon = n$ stattfindet, verloren ging.

§. III. Aperiodische Bewegung gedämpfter Magnete.

In dem Falle $\varepsilon > n$, wo also r reell ist, gilt Gleichung (VII), wie sie dasteht. Die Bewegung ist nicht mehr periodisch, sondern die Ablenkung als Function der Zeit wird dargestellt durch den Unterschied der Ordinaten zweier Exponentialcurven, die sich der Abscissenaxe asymptotisch nähern. Der Werth $t = \infty$ ist der einzig mögliche, der $x = 0$ macht. Fällt also der Magnet von der Ablenkung ξ, welche beliebig grofs gedacht werden kann, ohne Anfangsgeschwindigkeit herab, so wird der Nullpunkt nicht überschritten, sondern erst nach unendlicher Zeit erreicht. Die Curve der Ablenkungen bezogen auf die Zeit hebt bei $t = 0$ mit der Ordinate ξ und mit horizontaler Tangente an, und hat zuerst einen gegen die Abscissenaxe concaven Verlauf. Die Curve der Geschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\xi n^2}{2r} \cdot e^{-\varepsilon t}(e^{-rt} - e^{rt}) \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XII)}$$

ist am Ursprunge concav gegen die Abscissenaxe, und erreicht ein negatives Maximum für

$$t = \frac{1}{2r} \log \text{nat} \frac{\varepsilon + r}{\varepsilon - r}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XIII)}$$

welchem t also ein Wendepunkt der Curve der Ablenkungen entspricht. Nach genau der doppelten Zeit folgt der Wendepunkt der Curve der Geschwindigkeiten, die sich gleichfalls der Abscissenaxe asymptotisch anschliefst. Die Ordinaten beider Curven sind für gleiche Zeiten ξ proportional.

Eine bemerkenswerthe Vereinfachung tritt in vielen Beziehungen ein für den Grenzfall, dafs $n = \varepsilon$, oder dafs $r = 0$ wird. Das Integral der Differentialgleichung ist alsdann [vergl. oben S. 808 (V)]

$$x = (A + Bt)\, e^{-\varepsilon t},$$

A findet man $= \xi$, $B = \varepsilon\xi$, und man hat

$$x = \xi \cdot e^{-\varepsilon t}(1 + \varepsilon t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XIV)}$$

Diese Gleichung, und die davon abgeleitete

$$\frac{dx}{dt} = \xi . \varepsilon^2 t e^{-\varepsilon t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XV)$$

lassen sich leichter discutiren als die allgemeineren (VII) und (XII). Einige der sich dabei ergebenden Beziehungen sind in Fig. 1 dargestellt, in welcher $\xi = 2$, $\varepsilon = n = 1$ gesetzt sind. Die oberhalb der Abscissenaxe verlaufende Curve ($\xi w t$) ist die der Ablenkungen, die unterhalb ($0 m w_1 t$) die der Geschwindigkeiten. Die punktirte Curve ($\xi, \frac{\pi}{2n}, -\xi$) ist die Sinuscurve der Ablenkungen ohne Dämpfung, und stellt Gleichung (XI) für $n = 1$ dar. Der Wendepunkt der Curve der Ablenkungen und das Maximum der Curve der Geschwindigkeiten treten ein zur Zeit

$$t = \frac{1}{\varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XVI)$$

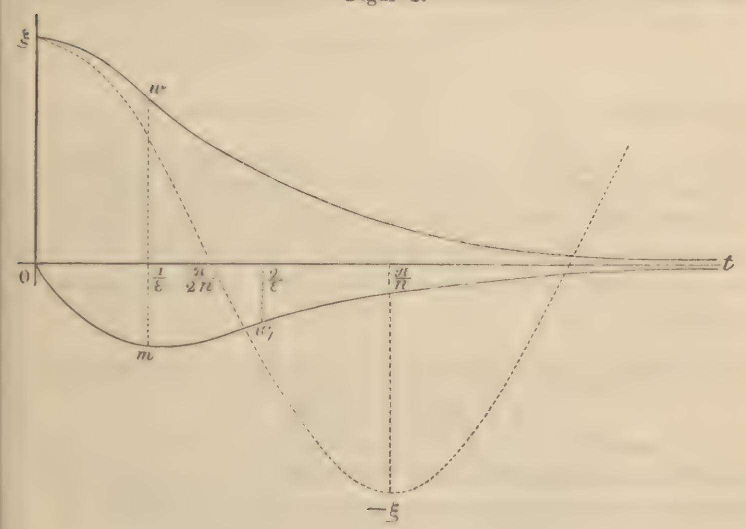
In der doppelten Entfernung vom Nullpunkt, also zur Zeit

$$t = \frac{2}{\varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XVII)$$

tritt auch hier der Wendepunkt der letzteren Curve ein. Die Ordinaten der Curven sind für gleiche Zeiten ξ proportional.



Figur 1.



Wird endlich ε im Vergleich zu n so grofs, oder, was völliger Astasie des Magnetes entspräche, n im Vergleich zu ε so klein, dafs n gegen ε verschwindet und r merklich $= \varepsilon$ ist, so nimmt das allgemeine vollständige Integral unserer Fundamentalgleichung abermals eine andere Gestalt an. Setzt man nämlich $n^2 = 0$, so wird jenes Integral

$$x = A \,.\, e^{-2\varepsilon t} + B, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XVIII)}$$

wo A und B die beiden willkürlichen Integrationsconstanten bedeuten. Unter denselben Annahmen über Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit wie früher, findet man

$$A = 0,\ B = \xi,\ x = \xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XIX)}$$

Der Magnet bleibt also bei ξ stehen, und die der Abscissenaxe parallele Gerade, welche ξ zur Ordinate hat, ist die Grenze, der sich die Curven der Ablenkungen bezogen auf die Zeit nähern, wenn n im Vergleich zu ε immer kleiner wird. Erhält aber unter diesen Umständen der Magnet im Augenblick $t = 0$ bei ξ einen Stofs, der ihm eine Geschwindigkeit $\pm c$ ertheilt, so wird

$$A = \mp \frac{c}{2\varepsilon}, \quad B = \xi \pm \frac{c}{2\varepsilon}, \quad x = \xi \pm \frac{c}{2\varepsilon}(1 - e^{-2\varepsilon t}) \,. \quad \text{(XX)}$$

Der Magnet bewegt sich also mit abnehmender Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = \pm\, c e^{-2\varepsilon t}$$

dem Punkte $\xi \pm \frac{c}{2\varepsilon}$ zu, wo er nach unendlicher Zeit stehen bleibt. Der Vorgang ist der Form nach genau der nämliche wie in dem Falle, wo ein Körper nach erhaltenem Stofse sich in einem Mittel bewegt, das ihm einen seiner Geschwindigkeit proportionalen Widerstand entgegensetzt; und dies ist die höchste Stufe des Arago'schen Phänomens des Rotationsmagnetismus.

§. IV. Übersicht der Bewegungsformen ungedämpfter und gedämpfter Magnete.

Je nach den Werthen von ε und n nimmt also das Integral der Fundamentalgleichung die fünf verschiedenen Formen an, welche folgende Übersicht nochmals im Zusammenhange zeigt.

			$x = \xi$ und $\frac{dx}{dt} = 0$ für $t = 0$
Bewegung periodisch.	$\varepsilon = 0$	$x = A . \sin \{ n (t - B) \}$ . . . . (III)	$= \xi . \cos (n t)$
			$= \xi . \sin \left(\frac{\pi}{2} - n t \right)$ . . . . (XI)
	$\varepsilon < n$, r imaginär, $= i \varrho$	$x = e^{-\varepsilon t} \{ (A + B) \cos (\varrho t) - i (A - B) \sin (\varrho t) \}$ (VIII)	$= \xi . e^{-\varepsilon t} \left[\frac{n}{\varrho} \sin \{ \varrho (t - \phi) \} \right]$ . . . (X)
			$= \xi . e^{-\varepsilon t} \left\{ \cos (\varrho t) + \frac{\varepsilon}{\varrho} \sin (\varrho t) \right\}$. (IX)
Bewegung aperiodisch.	$\varepsilon = n$, $r = 0$	$x = e^{-\varepsilon t} (A + B t)$ . . . . (V)	$= \xi . e^{-\varepsilon t} (1 + \varepsilon t)$ . . . . . . (XIV)
	$\varepsilon > n$, r reell	$x = e^{-\varepsilon t} (A e^{-rt} + B e^{rt})$ . . . . (VI)	$= \frac{\xi}{2r} . e^{-\varepsilon t} \{ (\varepsilon + r) e^{rt} - (\varepsilon - r) e^{-rt} \}$ (VII)
	$n = 0$, $r = \varepsilon$	$x = A . e^{-2 \varepsilon t} + B$ . . . . (XVIII)	$= \xi$ . . . . (XIX)

Aus (IX) wird durch $\varepsilon = 0$ (XI), durch $\varepsilon = n$ (XIV); aus (VII) durch $\varepsilon = n$ (XIV), durch $n = 0$ (XIX). Dieser Übergang der verschiedenen Formen in einander ist das analytische Abbild des allmählichen Überganges, der in Wirklichkeit von den Schwingungen des ungedämpften Magnetes bis zur völligen Astasie des gedämpften Magnetes führt.

Die Schwingungsdauer des gedämpften Magnetes ist nach Gauss

$$T_1 = \frac{\pi}{\sqrt{n^2 - \varepsilon^2}} \quad \ldots\ldots \quad \text{(XXI)}$$

Wird also $\varepsilon =$ oder $> n$, d. h. die Bewegung aperiodisch, so spricht sich dies darin aus, dafs der Ausdruck für die Schwingungsdauer unendlich grofs, beziehlich imaginär wird.

Der Ausdruck für das in natürlichen Logarithmen angegebene logarithmische Decrement der Schwingungen des gedämpften Magnetes ist

$$\lambda = \varepsilon T_1 = \frac{\varepsilon \pi}{\sqrt{n^2 - \varepsilon^2}} .$$

Für $\varepsilon = n$ ist λ unendlich, schon die zweite Amplitude verschwindet im Vergleich zur ersten. Für $\varepsilon > n$ ist λ imaginär, und auch so giebt sich die eingetretene Schwingungslosigkeit zu erkennen.

§. V. Aperiodische Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit.

Wir wollen jetzt einen Fall betrachten, dessen Behandlung wesentlich dazu beitragen wird, unsere Kenntnifs der aperiodischen Bewegung gedämpfter Magnete zu vervollständigen. Dies ist der Fall, wo die Anfangsgeschwindigkeit nicht Null ist, sondern einen negativen Werth $-c$, also im Sinne der Richtkraft, besitzt. Die Constanten A und B werden beziehlich in Gleichung (VI)

$$\frac{c - \xi(\varepsilon - r)}{2r}, \quad \frac{-c + \xi(\varepsilon + r)}{2r},$$

und in Gleichung (V)

$$\xi, \quad -c + \varepsilon\xi;$$

die Gleichungen selber

$$x = \frac{e^{-\varepsilon t}}{2r}\left[\{c - \xi(\varepsilon - r)\}e^{-rt} - \{c - \xi(\varepsilon + r)\}e^{rt}\right], \quad \text{(XXII)}$$

$$x = e^{-\varepsilon t}\{\xi - t(c - \varepsilon\xi)\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(XXIII)}$$

Die Bewegung ist aperiodisch; übersteigt aber c in jedem der beiden Fälle (XXII) und (XXIII) einen gewissen Werth, den wir bald näher betrachten wollen, so wird der Nullpunkt überschritten. Noch ehe c diesen Werth erreicht, werden die Curven der Ablenkungen und der Geschwindigkeiten von $t = 0$ ab convex gegen die Abscissenaxe. Im Falle (XXIII) tritt dies z. B. ein bei $c > \frac{1}{2}\varepsilon\xi$ für erstere, bei $c > \frac{1}{3}\varepsilon\xi$ für letztere Curve, während, wie wir sehen werden, erst von $c > \varepsilon\xi$ ab der Nullpunkt überschritten wird. Dies Überschreiten geschieht im Falle (XXII) zur Zeit

$$t_0 = \frac{1}{2r}\log\frac{c - \xi(\varepsilon - r)}{c - \xi(\varepsilon + r)},$$

im Falle (XXIII) zur Zeit

$$t_0 = \frac{\xi}{c - \varepsilon\xi}.$$

Jenseit des Nullpunktes kehrt der Magnet in seiner Bewegung um, im Falle (XXII) zur Zeit

$$t_{max} = \frac{1}{2r}\log\frac{(\varepsilon + r)\{c - \xi(\varepsilon - r)\}}{(\varepsilon - r)\{c - \xi(\varepsilon + r)\}},$$

im Falle (XXIII) zur Zeit

$$t_{max} = \frac{c}{\varepsilon(c - \varepsilon\xi)},$$

zu welchen Zeiten $\frac{dx}{dt}$ durch Null geht. Die Curve der Ablenkungen ist vom Nullpunkt der Scale ab concav gegen die Abscissenaxe der Zeiten; es erfolgt aber ein positives Maximum der Geschwindigkeit, sowie ein Wendepunkt der Curve der Ablenkungen im Falle (XXII) zur Zeit

$$t_w = \frac{1}{2r} \log \frac{(\varepsilon + r)^2 \{c - \xi(\varepsilon - r)\}}{(\varepsilon - r)^2 \{c - \xi(\varepsilon + r)\}},$$

im Falle (XXIII) zur Zeit

$$t_w = \frac{2c - \varepsilon\xi}{\varepsilon(c - \varepsilon\xi)}.$$

Darauf nähert sich der Magnet von der anderen Seite her asymptotisch dem Ruhestande. Auch die Curve der Geschwindigkeiten nähert sich schliefslich asymptotisch der Abscissenaxe, nachdem sie im Falle (XXII) zur Zeit

$$t_{w_{\prime}} = \frac{1}{2r} \log \frac{(\varepsilon + r)^3 \{c - \xi(\varepsilon - r)\}}{(\varepsilon - r)^3 \{c - \xi(\varepsilon + r)\}},$$

im Falle (XXIII) zur Zeit

$$t_{w_{\prime}} = \frac{3c - 2\varepsilon\xi}{\varepsilon(c - \varepsilon\xi)}$$

einen Wendepunkt gehabt hat.

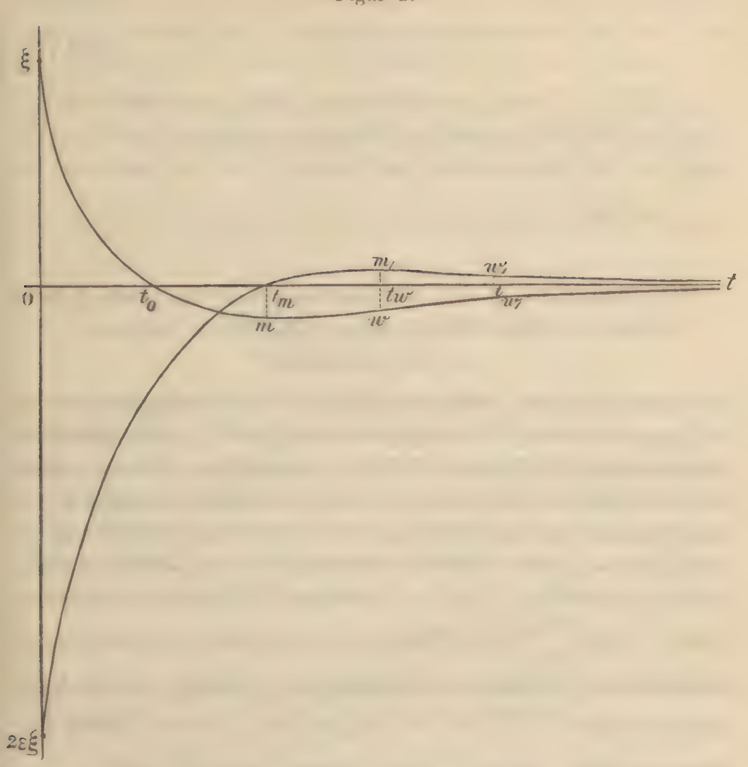
Die Zeiten t_0, t_{max}, t_w, $t_{w_{\prime}}$ bilden also in beiden Fällen Glieder einer arithmetischen Reihe, deren beständiger Unterschied im Falle (XXII)

$$\frac{1}{2r} \log \frac{\varepsilon + r}{\varepsilon - r},$$

im Falle (XXIII) $\frac{1}{\varepsilon}$ beträgt [vergl. oben S. 812. 813, (XII, XVI, XVII)].

In Fig. 2 zeigt $\xi t_0 m w t$ die durch (XXIII) dargestellte Curve der Ablenkungen bezogen auf die Zeit, nebst der zugehörigen Curve der Geschwindigkeiten ($2\varepsilon\xi$, $t_{m} m_{\prime} w_{\prime} t$), unter sonst denselben Annahmen wie in Fig. 1; die Curve der Ablenkungen ist von ihrem negativen Maximum m ab dieselbe wie in Fig. 1, nur mit verkleinerten Ordinaten. Die Anfangsgeschwindigkeit c ist in der Figur $= 2\varepsilon\xi = 4$ gesetzt.

Figur 2.



Da die Zeit in ihrem Fortschritt nicht negativ werden kann, haben die Ausdrücke für t_0 eine wirkliche Bedeutung nur wenn in dem auf den Fall (XXII) bezüglichen Ausdruck die Gröfse unter dem Logarithmus positiv und > 1, also

$$c > \xi\,(\varepsilon + r), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XXIV)}$$

wo r, wie stets von hier ab, einen positiven Werth hat; oder wenn in dem auf den Fall (XXIII) bezüglichen Ausdruck

$$c > \varepsilon\,\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XXV)}$$

ist. Noch für $c = \xi\,(\varepsilon + r)$ im ersten, $c = \varepsilon\,\xi$ im zweiten Falle wird der Nullpunkt erst nach unendlicher Zeit erreicht, und zwar nehmen dabei die Gleichungen (XXII) und (XXIII) beziehlich die einfachen Formen an

$$x = \xi \, . \, e^{-(\varepsilon + r)t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XXVI)}$$

$$x = \xi \, . \, e^{-\varepsilon t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XXVII)}$$

Ist $r = \varepsilon$, oder gilt Gleichung (XX), so mufs $c = 2\varepsilon\xi$ sein, damit der Magnet den Nullpunkt erreiche, und $> 2\varepsilon\xi$, damit er ihn überschreite. Ist $c = 2\varepsilon\xi + \delta$, so bleibt er bei $-\frac{\delta}{2\varepsilon}$ stehen.

§. VI. Herleitung der Bedingung für die zum Überschreiten des Nullpunktes nöthige Anfangsgeschwindigkeit.

Der Sinn der Bedingung für die zum Überschreiten des Nullpunktes nöthige Anfangsgeschwindigkeit in den durch die Gleichungen (XXII) und (XXIII) dargestellten Fällen ergiebt sich aus folgender Betrachtung. Es ist offenbar gleichgültig, ob dem Magnete zu einer Zeit t_0, wo er aus einer Ablenkung x_0 fallen gelassen wird, eine Geschwindigkeit $-c_0$ ertheilt werde, oder ob er zur Zeit t_0 bei x_0 anlangend, dieselbe Geschwindigkeit $-c_0 = \frac{dx_0}{dt}$ durch Fallen aus einer höheren Ablenkung ξ, gleichsam als Fallgeschwindigkeit, erlange. Keine Fallgeschwindigkeit $\frac{dx_0}{dt}$, die der Magnet bei x_0 durch Fallen von einem beliebig hohen ξ hätte erlangen können, würde also, wenn sie dem Magnete beim Fallenlassen von x_0 zur Zeit t_0 als Anfangsgeschwindigkeit $-c_0$ ertheilt würde, ihn über den Nullpunkt führen. Denn obschon in Wirklichkeit die Anwendung unserer Formeln der oben S. 809 erwähnten Beschränkung unterliegt, gelten sie in der Idee für jeden denkbaren Werth von ξ, und wenn also der Magnet die Geschwindigkeit $\frac{dx_0}{dt} = -c_0$ durch Fallen von jenem beliebig hohen ξ erlangt hätte, würde er sich asymptotisch der Ruhelage nähern.

Die Rechnung bestätigt diese Schlüsse. Der Einfachheit halber sei die Bewegung nur eben aperiodisch, d. h. $\varepsilon = n$, und demgemäfs ihre Gleichung [s. oben S. 812 (XIV)]

$$x = \xi \, . \, e^{-\varepsilon t}(1 + \varepsilon t) \, ,$$

x_0 eine Ordinate zu t_0. Indem wir den Coordinatenursprung von $t = 0$ nach $t = t_0$ verlegen, verwandeln wir der Form nach den Vorgang in den durch Gleichung (XXIII) dargestellten, und haben also

$$x = e^{-\varepsilon(t - t_0)} \left\{ x_0 - (t - t_0)\left(-\frac{dx_0}{dt} - \varepsilon x_0\right) \right\} \quad \text{(XXVIII)}$$

Es ist aber, nach Gleichung (XIV) und (XV),

$$x_0 = \xi . e^{-\varepsilon t_0}(1 + \varepsilon t_0),$$

$$\frac{dx_0}{dt} = -\xi . \varepsilon^2 t_0 e^{-\varepsilon t_0}.$$

Diese Werthe in (XXVIII) eingesetzt liefern wieder die ursprüngliche Gleichung (XIV), d. h. der Nullpunkt wird nicht überschritten, wenn dem Magnete bei x_0 eine Geschwindigkeit ertheilt wird, wie er sie dort durch Fallen von einem beliebig hohen ξ hätte erlangen können. x kann erst Null werden, wie Gleichung (XXVIII) uns abermals vorführt, wenn

$$-\frac{dx_0}{dt} > \varepsilon x_0, \text{ d. h. } c_0 > \varepsilon x_0.$$

Dieselbe Schlufsfolge führt unter der Annahme $\varepsilon > n$ zur Bedingung

$$-\frac{dx_0}{dt} > (\varepsilon + r)x_0, \text{ d. h. } c_0 > (\varepsilon + r)x_0,$$

entsprechend der Ungleichheit (XXIV) auf S. 819. So werden wir darauf hingewiesen, dafs εx, $(\varepsilon + r)x$ vielleicht allgemein die Grenzgeschwindigkeiten seien, die beziehlich für $\varepsilon = n$, $\varepsilon > n$ der Magnet bei x durch Fallen aus einer beliebig hohen Anfangslage erlangen könne. Es handelt sich darum, die Richtigkeit dieser Vermuthung zu prüfen.

Dazu müssen wir von der Betrachtung der Geschwindigkeit als Function der Zeit und Anfangslage $\frac{dx}{dt} = f(t, \xi)$, übergehen zur Betrachtung der Geschwindigkeit als Function der Ablenkung und Anfangslage $\frac{dx}{dt} = \varphi(x, \xi)$. Letztere Function

läſst sich nun zwar nicht explicit darlegen; dies verhindert aber nicht, den Verlauf der entsprechenden Curve soweit festzustellen, als für unsere Zwecke nöthig ist. Aus Gründen, die bald einleuchten werden, berücksichtigen wir zunächst nur den Fall $\varepsilon = n$, oder die Bewegungsgleichung (XIV).

Der Kürze halber setzen wir

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad x'' = \frac{dx'}{dt}, \quad x''' = \frac{dx''}{dt}.$$

Wir haben dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= +\,\xi . e^{-\varepsilon t}(1 + \varepsilon t) \\ x' &= -\,\xi . e^{-\varepsilon t}\varepsilon^2 t \\ x'' &= +\,\xi . e^{-\varepsilon t}\varepsilon^2(\varepsilon t - 1) \\ x''' &= -\,\xi . e^{-\varepsilon t}\varepsilon^3(\varepsilon t - 2)\,. \end{aligned}$$

Nun ist allgemein

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{x''}{x'}, \quad \frac{d^2x'}{dx^2} = \frac{x'x''' - x''^2}{x'^3}.$$

Hieraus ergeben sich, durch Einsetzen obiger Werthe für x', x'', x''', folgende Beziehungen:

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{1 - \varepsilon t}{t}, \quad \frac{d^2x'}{dx^2} = \frac{1}{\xi . e^{-\varepsilon t}\varepsilon^2 t^3}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen läſst sich der Verlauf der gesuchten Curve $x' = f(x)$ zwischen den Grenzen $x = 0$, $x = \xi$ deshalb discutiren, weil, während t von Null bis ∞ stetig wächst, x stetig von ξ bis Null abnimmt.

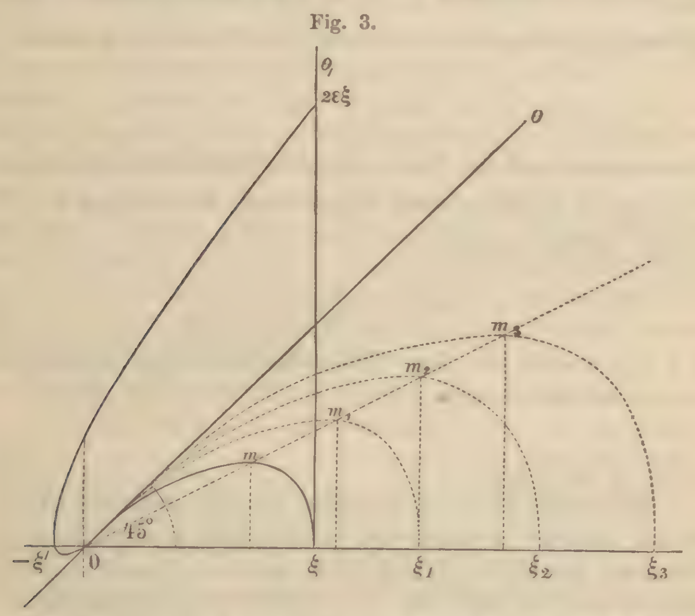
Aus dem Werthe von $\frac{d^2x'}{dx^2}$ folgt zunächst, daſs die Curve zwischen den angegebenen Grenzen keinen Wendepunkt hat, sondern der Abscisse stets ihre Concavität zukehrt. Aus dem Werthe von $\frac{dx'}{dx}$ folgt ferner, daſs die Curve bei $x = 0$ aus der Abscissenaxe herabsteigt unter einem Winkel, dessen Tangente den absoluten Werth ε hat. Sie hat dann für $t = \frac{1}{\varepsilon}$ (XVI) oder $x = \frac{2}{e}\xi$ ein Maximum im absoluten Betrage von $\frac{\varepsilon}{e}\xi$, und

kehrt bei ξ zur Abscissenaxe zurück mit darauf senkrechter Tangente; denn für $t = 0$ ist

$$\frac{dx'}{dx} = \infty \cdot$$

Unter denselben Annahmen, wie den bei Fig. 1 gemachten, sieht daher unsere Curve etwa aus, wie die ausgezogene Curve $0 m \xi$ in Fig. 3, in welcher die Geschwindigkeiten, obschon analytisch negativ, der Anschaulichkeit halber über der Abscissenaxe aufgetragen, und 0ϑ, $\xi\vartheta_{\prime}$ die Tangenten an den letzten Elementen der Curve bei 0 und ξ sind. Da wir in der Figur $\varepsilon = 1$ gemacht haben, ist der Winkel $\vartheta 0 \xi = 45°$.

Fig. 3.



Dies ist der allgemeine Verlauf der Curve für jeden Werth von ξ. Es erübrigt sich ein Bild davon zu machen, wie sich die Curve mit ξ ändert. Sowohl die Ordinaten als die Abscissen der Curve sind für ein gegebenes t proportional ξ (s. oben S. 813); die den verschiedenen Werthen des Parameters ξ entsprechenden Curven sind also einander ähnlich. Da die Curven vom Nullpunkte sämmtlich unter dem Winkel

ausstrahlen, dessen Tangente ε ist, während der ξ-Punkt auf der Abscissenaxe weiter hinaus verlegt wird, so bilden die durch Vergröfserung von ξ aus $0m\xi$ entstehenden Curven eine Schaar, wie Fig. 3 in den punktirten Curven $0m_1\xi_1$, $0m_2\xi_2$, ... zeigt. Fafst man einen Punkt einer der Curven in's Auge, so rückt in dem Mafse, wie ξ wächst, der Punkt auf der durch ihn und den Nullpunkt gelegten Geraden

$$x' = -\frac{\varepsilon t}{\varepsilon t + 1} \cdot \varepsilon x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XXIX)}$$

weiter fort; denn alsdann wachsen Ordinaten und Abscissen des Punktes proportional ξ. Z. B. das Maximum unserer Curve $x' = \varphi(x, \xi)$ bewegt sich wegen $t = \frac{1}{\varepsilon}$ (XVI) auf der Geraden

$$x' = -\frac{1}{2}\varepsilon x$$

(s. $0mm_1m_2m_3$ in der Figur); der dem Wendepunkte der Curve $x' = f(t, \xi)$ (s. oben S. 821) entsprechende Punkt wegen $t = \frac{2}{\varepsilon}$ (XVII) auf der Geraden

$$x' = -\frac{2}{3}\varepsilon x$$

u. s. w.; endlich der dem Nullpunkte nächste Punkt wegen $t = \infty$ auf der Geraden

$$x' = -\varepsilon x$$

(s. 0ϑ in der Figur).

Macht man zuletzt ξ unendlich, und soll Gleichung (XIV) für ein endliches x erfüllt sein, so mufs auch t unendlich sein. Erst nach unendlicher Zeit trifft der aus dem Unendlichen fallende Magnet im Endlichen ein, wobei seine Geschwindigkeit für endliche Zeit unendlich ist. Im Endlichen aber besteht, wie wir eben sahen, wegen $t = \infty$ in Gleichung (XXIX), zwischen seiner Geschwindigkeit und Ablenkung in jedem Augenblicke die Relation

$$x' = -\varepsilon x.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Gerade 0ϑ in der Figur ist somit die Grenze, der sich im Endlichen

unsere Curven nähern, wenn ξ in's Unendliche wächst; was schon aus ihrer Ähnlichkeit ohne Weiteres erhellt, übrigens sich den Gleichungen (XIV) und (XV) auch unmittelbar entnehmen läfst. Der durch Division beider Gleichungen erhaltene Werth von t in (XIV) eingesetzt giebt

$$\varepsilon\xi = (x' + \varepsilon x)\, e^{\frac{x'}{x' + \varepsilon x}};$$

eine Relation, die für $\xi = \infty$ nur stattfindet, wenn $x' = -\varepsilon x$ ist.

Damit sind wir am Ziele. In jeder für uns in Betracht kommenden Entfernung vom Nullpunkte können wir die Gerade 0ϑ für die Curve selber nehmen, in der die Geschwindigkeit des aus verhältnifsmäfsig sehr grofser Ferne fallenden Magnetes abnehmen würde; diese Abnahme geschähe den Ablenkungen proportional. Die Ordinaten der Geraden 0ϑ geben folglich für jedes x die gröfste Fallgeschwindigkeit an, welche der Magnet dort erlangen könnte, und mit der er also noch nicht den Nullpunkt überschreiten würde. Setzen wir $x = \xi$, so folgt $-\varepsilon\xi$ als gröfste bei ξ erreichbare Fallgeschwindigkeit. Es mufs also im Fall $\varepsilon = n$ dem Magnete bei ξ, damit der Nullpunkt überschritten werde, eine Anfangsgeschwindigkeit $c > \varepsilon\xi$ (XXV) ertheilt werden; und so hat in diesem Fall unsere Vermuthung sich bestätigt.

Setzt man wie in Fig. 2 $c = 2\varepsilon\xi = 4$, so zeigt die Curve $(2\varepsilon\xi, +\xi', 0)$ in Fig. 3, wie etwa die Curve der Geschwindigkeiten bezogen auf die Ablenkungen sich gestaltet, wenn der Magnet in Folge einer ihm bei ξ ertheilten Anfangsgeschwindigkeit den Nullpunkt überschreitet. Das Stück $(-\xi', 0)$ der Curve ist natürlich nach demselben Gesetze gebildet wie die Curven $0m\xi, 0m_1\xi_1, \ldots$, und das verkleinerte Gegenstück dazu.

Die Gleichung

$$x = e^{-\varepsilon t}\left\{\xi - t(c - \varepsilon\xi)\right\}$$

[(XXIII) S. 817], welche im Fall $\varepsilon = n$ die Bewegung des Magnetes mit der Anfangsgeschwindigkeit $-c$ vorstellt, geht für $c = \varepsilon\xi$ über in

$$x = \xi . e^{-\varepsilon t}$$

[(XXVII) S. 820]. Anstatt als Anfangsgeschwindigkeit, können

wir uns $c = \varepsilon \xi$ jetzt aber auch als Fallgeschwindigkeit, durch Fallen aus dem Unendlichen entstanden, denken, indem wir annehmen, dafs die Zeit von dem Augenblick an, wo der aus dem Unendlichen fallende Magnet durch die Lage ξ hindurchging, neu gezählt werde. Der aus dem Unendlichen nach unendlicher Zeit im Endlichen angelangte Magnet würde den Nullpunkt also erst nach abermals unendlicher Zeit erreichen. Übrigens stöfst hier die Umkehrung der Gleichung zwischen x und t auf keine Schwierigkeit mehr, daher in diesem Falle die Gleichung $x' = \varphi(x, \xi)$ selber darstellbar wird. Man hat

$$x' = -\xi . \varepsilon e^{-\varepsilon t},$$

und indem man für $e^{-\varepsilon t}$ seinen Werth aus (XXVII) setzt, erhält man dem Obigen entsprechend

$$x' = -\varepsilon x,$$

wie umgekehrt Gleichung (XXVII) aus der Integration des letzteren Ausdruckes hervorgeht, wenn man zur Constantenbestimmung $x = \xi$ für $t = 0$ setzt.

Wendet man dieselben Betrachtungen auf den Fall $\varepsilon > n$ an, so findet man

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{(\varepsilon - r) e^{rt} - (\varepsilon + r) e^{-rt}}{e^{-rt} - e^{rt}},$$

$$\frac{d^2 x'}{dx^2} = -\frac{1}{\xi . n^2 e^{-\varepsilon t}} \left\{ \frac{2r}{e^{-rt} - e^{rt}} \right\}^3.$$

Die Curve $x' = \varphi(x, \xi)$ ist also auch in diesem Fall ohne Wendepunkt, concav gegen die Abscissenaxe, mit einem Maximum für den oben (XIII) gefundenen Werth von t; die Tangente des Winkels am Nullpunkte beträgt $\varepsilon - r$; am ξ-Punkte ist der Winkel ein rechter. Die Curven für verschiedene ξ sind einander ähnlich. Für $\xi = \infty$ mufs auch hier $t = \infty$ sein, wenn x endlich sein soll; als diesem Fall entsprechende Grenzgestalt der Curvenschaar erhält man aber hier die Gerade

$$x' = -(\varepsilon - r) x;$$

$(\varepsilon - r)\xi$ ist die bei ξ erreichbare Grenzgeschwindigkeit. Auch hier folgt dasselbe unmittelbar aus dem durch Eliminiren von t zwischen (VII) und (XII) erhaltenen Ausdruck

$$\xi^{2r} = \frac{\left(x + \frac{x'}{\varepsilon + r}\right)^{\varepsilon + r}}{\left(x + \frac{x'}{\varepsilon - r}\right)^{\varepsilon - r}},$$

dessen rechte Seite für $x' = -(\varepsilon - r)x$ unendlich wird.

Als obere Grenze der Anfangsgeschwindigkeit, welche dem Magnete bei ξ ertheilt, ihn für $\varepsilon > n$ noch nicht über den Nullpunkt führt, fanden wir oben S. 819 (XXIV) den Werth $(\varepsilon + r)\xi$. In diesem Falle trifft also unsere Vermuthung hinsichtlich der Bedeutung dieser Grenze in etwas anderer Form zu, als in dem Fall $\varepsilon = n$. Es mufs die dem Magnete bei ξ ertheilte Anfangsgeschwindigkeit die bei ξ erreichbare höchste Fallgeschwindigkeit, unstreitig der stärkeren Dämpfung halber, noch um mehr als $2r\xi$ übertreffen, damit der Nullpunkt überschritten werde.

Eliminirt man mit Hülfe von Gleichung (XXVI) t in der durch Differenziren derselben Gleichung erhaltenen Gleichung

$$x' = -\xi.(\varepsilon + r)e^{-(\varepsilon + r)t},$$

so ergiebt sich

$$x' = -(\varepsilon + r)x$$

als Gleichung der auf die Scale aufgetragenen Anfangsgeschwindigkeiten, welche den Magnet noch nicht über den Nullpunkt führen. Als Gleichung der ebenso aufgetragenen Grenzgeschwindigkeiten beim Fall aus dem Unendlichen fanden wir so eben

$$x' = -(\varepsilon - r)x.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert, wenn man für $t = 0$ abermals $x = \xi$ macht, zwischen x und t die Relation

$$x = \xi.e^{-(\varepsilon - r)t}.$$

Für $r = \varepsilon$ hat man $x' = 2\varepsilon(\xi - x) - c$. Erhielte der völlig astatische Magnet bei ξ die Geschwindigkeit $-2\varepsilon\xi$, so nähme diese in der Geraden $x' = -2\varepsilon x$ ab (s. S. 814 (XX), 820).

§. VII. Verhalten aperiodisch sich bewegender Magnete bei kurzer Einwirkung eines Stromes.

Setzen wir jetzt den Fall, zur Zeit Null wirke ein constanter Strom von der Stärke I eine sehr kurze Zeit τ auf

den in seiner Ruhelage befindlichen Magnet. Der Strom wird dem Magnet eine, diesmal positive Geschwindigkeit

$$c = \frac{\mu I \tau}{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XXX)$$

ertheilen, wenn wir mit M sein Trägheitsmoment, mit μ das Drehungsmoment bezeichnen, welches der Strom von der Stärke Eins in dem Multiplicatordraht auf den Magnet in seiner Ruhelage übt. Die Constanten A und B in der allgemeinen Gleichung (VI) findet man, wenn man für $t = \tau$ (sehr nahe) $= 0$, $x = 0$ und $\frac{dx}{dt} = c$ setzt, beziehlich (sehr nahe)

$$= -\frac{c}{2r} \text{ und } = +\frac{c}{2r},$$

und man erhält als Gleichung der Bewegung

$$x = \frac{c}{2r}\left(e^{-(\varepsilon - r)t} - e^{-(\varepsilon + r)t}\right) \quad . \quad . \quad (XXXI)$$

Der Magnet kehrt also um zur Zeit

$$t_{max} = \frac{1}{2r} \log \frac{\varepsilon + r}{\varepsilon - r},$$

und nähert sich wieder asymptotisch der Ruhelage. Einfacher gestalten sich auch hier die Dinge für den Grenzfall $\varepsilon = n$. In der allgemeinen Gleichung (V) wird unter den eben gemachten Voraussetzungen $A = 0$ und $B = c$, die Gleichung selber wird

$$x = cte^{-\varepsilon t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XXXII)$$

Die Curve der Ablenkungen ist am Ursprunge concav gegen die Abscissenaxe, ihre Ordinate erreicht bei

$$t_{max} = \frac{1}{\varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XXXIII)$$

ein Maximum im Betrage von

$$x_{max} = \frac{c}{\varepsilon e}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XXXIV)$$

dem bei

$$t_w = \frac{2}{\varepsilon}$$

ein Wendepunkt folgt. Der Ausdruck für t_{max} erlaubt durch einen beliebigen dem Magnet ertheilten Stromstofs $\varepsilon = n$ numerisch zu bestimmen. Die Curve der Geschwindigkeiten hebt bei $t = 0$ mit der Ordinate c an, und ist convex gegen die Abscissenaxe, bis sie diese bei t_{max} schneidet. Sie erreicht zur Zeit t_w ein negatives Maximum und hat einen Wendepunkt bei

$$t_{w,} = \frac{3}{\varepsilon}.$$

Die oben S. 818 bemerkte arithmetische Reihe der Zeiten kehrt also hier wieder.[1])

§. VIII. Verhalten aperiodisch sich bewegender Magnete bei Ablenkung durch einen beständigen Strom, und bei Stromschwankungen.

Bewegt sich der Magnet unter dem Einflufs eines ihn auf dem Nullpunkte zur Zeit Null treffenden beständigen Stromes von der Stärke I, aber von längerer Dauer, einer neuen Gleichgewichtslage unter dem vereinten Einflusse dieses Stromes und der Richtkraft zu, so wird die Differentialgleichung der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{dx}{dt} + n^2x = k,$$

wo die Constante k die innerhalb derselben Grenzen, welche für die Proportionalität der Richtkraft und der Ablenkung gelten, von der letzteren unabhängige ablenkende Kraft, dividirt durch das Trägheitsmoment, vorstellt. Das allgemeine vollständige Integral heifst jetzt

$$x = \frac{k}{n^2} + e^{-\varepsilon t}(Ae^{-rt} + Be^{rt}) \quad . \quad . \quad \text{(XXXV)}$$

---

[1]) Für den Fall $\varepsilon < n$ hat Hr. W. Weber die Formel entwickelt

$$x_{max} = c\,\frac{T}{\pi}\,.\,e^{-\frac{\lambda}{\pi}\,arc\,tg\,\frac{\pi}{\lambda}},$$

wo T die Schwingungsdauer ohne Dämpfung, λ das logarithmische Decrement bedeuten (Elektrodynamische Mafsbestimmungen u. s. w. Leipzig 1850. S. 346. Anm.). Diese Formel ist für $\varepsilon = n$ identisch mit unserer Formel (XXXIV).

Indem man, für $t = 0$, $x = 0$ und $\frac{dx}{dt} = 0$ setzt, erhält man

$$A = \frac{k}{n^2} \cdot \frac{\varepsilon - r}{2r}, \; B = -\frac{k}{n^2} \cdot \frac{\varepsilon + r}{2r}.$$

Bezeichnet man mit H die horizontale Componente der Erdkraft, mit m das magnetische Moment des Magnetes für parallele Kräfte, und bemerkt man, dafs

$$n^2 = \frac{mH}{M}, \quad \ldots \ldots \quad \text{(XXXVI)}$$

so findet man

$$\frac{k}{n^2} = \frac{\mu I}{mH}.$$

Durch Einsetzen der Werthe für A, B und $\frac{k}{n^2}$ in (XXXV) wird

$$x = \frac{\mu I}{mH}\left[1 - \frac{e^{-\varepsilon t}}{2r}\left\{(\varepsilon + r)e^{rt} - (\varepsilon - r)e^{-rt}\right\}\right]. \quad \text{(XXXVII)}$$

Die Bewegung erfolgt also, wie zu erwarten, nach demselben Gesetze wie beim Fallenlassen des Magnetes, nur dafs an die Stelle von ξ der Nullpunkt, an die des Nullpunktes die beständige Ablenkung $\frac{\mu I}{mH}$ tritt, welche, ohne überschritten zu werden, schwingungslos und in der Theorie erst nach unendlicher Zeit erreicht wird.

Für $\varepsilon = n$ kommt in Gleichung (XXXVII) statt des von 1 abzuziehenden Termen

$$e^{-\varepsilon t}(1 + \varepsilon t)$$

zu stehen.

§. IX. Sonstige Combinationen von Lage und Geschwindigkeit des Magnetes und von ihn treffenden Kräften.

Trifft ein positiver Stromstofs den Magnet im Augenblicke des Fallenlassens, so gelten die Formeln (XXII) und (XXIII), nur dafs c sein Zeichen ändert. Der Magnet schlägt weiter aus, kehrt um und nähert sich asymptotisch dem Nullpunkte.

Wird der im Fallen begriffene Magnet bei x_1 zur Zeit t_1 von einem Stofse getroffen, der ihm eine Geschwindigkeit $\pm c$

ertheilt, so tritt eine Discontinuität der Bewegung ein. Je nachdem $\varepsilon >$ oder $= n$, gelangt man zu den Gleichungen

$$x = \frac{\xi}{2r}\left\{(\varepsilon + r)\, e^{-(\varepsilon - r)(t_i + t)} - (\varepsilon - r)\, e^{-(\varepsilon + r)(t_i + t)}\right\}$$

$$\pm \frac{c}{2r}\left\{e^{-(\varepsilon - r)\, t} - e^{-(\varepsilon + r)\, t}\right\} \quad . \; . \; . \; \text{(XXXVIII)}$$

$$x = \xi . e^{-\varepsilon (t_i + t)}\left\{1 + \varepsilon (t_i + t)\right\} \pm c t e^{-\varepsilon t}. \quad . \; . \; . \; . \; \text{(XXXIX)}$$

Hier ist t die vom Augenblicke des Stofses an neu gezählte Zeit. Das rechte Glied von Gleichung (XXXVIII) und (XXXIX) ist die algebraïsche Summe der rechten Glieder beziehlich von Gleichung (VII) und (XXXI), Gleichung (XIV) und (XXXII), nur dafs im ersten Term $t_i + t$ für t steht: es findet, wie dies nicht anders sein kann, Superposition der Bewegungen statt.

Ist c negativ, so kann hier wieder der Nullpunkt überschritten werden; doch mufs im Falle (XXXVIII)

$$c - \frac{dx_i}{dt} > (\varepsilon + r)\, x_i,$$

im Falle (XXXIX)

$$c - \frac{dx_i}{dt} > \varepsilon x_i$$

sein (vgl. oben §. VI).

Schwankt ein beständiger Strom, der den Magnet abgelenkt hält, so dafs seine Stärke von I sich plötzlich zu I_i ändert, so erhält man, je nachdem $\varepsilon >$ oder $= n$, die Gleichungen

$$x = \frac{\mu}{mH}\left[I_i + (I - I_i)\,\frac{e^{-\varepsilon t}}{2r}\left\{(\varepsilon + r)\, e^{rt} - (\varepsilon - r)\, e^{-rt}\right\}\right],$$

$$x = \frac{\mu}{mH}\left\{I_i + (I - I_i)\, e^{-\varepsilon t}\,(1 + \varepsilon t)\right\}:$$

der Magnet geht schwingungslos in die neue Lage über.

Ein Hin- und Hergang des aperiodischen Magnetes ist nur möglich, wie man jetzt auch ohne Rechnung sicher schliefsen kann, wenn die Gleichgewichtslage selber bei positiver Schwankung der Stromstärke wieder zurück-, bei negativer Schwankung wieder vorspringt, und wenn entweder dieser zweite Sprung die Gleichgewichtslage wieder auf die andere Seite des Magnetes

verlegt, oder der zweite Sprung zu einer Zeit geschieht, wo in Folge des ersten Sprunges der Magnet noch eine dem zweiten Sprunge entgegengesetzte Geschwindigkeit hat; im letzteren Falle darf aber, soll die neue Gleichgewichtslage überschritten werden, diese Gleichgewichtslage höchstens in solcher Entfernung $\xi_{\prime}$ vor dem ihr entgegenkommenden Magnete stehen bleiben, dafs seine Geschwindigkeit, je nachdem $\varepsilon >$ oder $= n$, beziehlich noch $> (\varepsilon + r)\,\xi_{\prime}$ oder $> \varepsilon\,\xi_{\prime}$ ist (vgl. oben §. VI).

§. X. Nähere Bestimmung der experimentellen Bedingungen, unter denen die Bewegung gedämpfter Magnete aperiodisch wird.

Es wird jetzt nützlich sein, in den Ausdruck

$$r = \sqrt{\varepsilon^2 - n^2}$$

statt der von Gauss aus analytischen Gründen angenommenen und bisher auch von uns benutzten Symbole 2ε und n^2 die wirklichen Gröfsen zu setzen, die darin eingehen. Für n^2 haben wir schon oben seinen Werth $\frac{mH}{M}$ eingeführt (XXXVI), den wir aber noch näher so bestimmen wollen, dafs wir für m schreiben $(\iota + \gamma_{\prime} H)\, m'$, wo ι die permanente, $\gamma_{\prime} H$ die durch H inducirte[1]) Intensität des Magnetes, m' sein Moment für parallele Kräfte bei der Intensität Eins bedeuten. Man hat also

$$n^2 = \frac{(\iota + \gamma_{\prime} H)\, m' H}{M}.$$

Bezeichnen wir sodann mit $\mathfrak{m}'$ das Drehungsmoment, welches für die magnetische Intensität Eins auf den Magnet ausgeübt wird durch eine Strömung im Dämpfer, wie sie der Magnet bei seiner Winkelbewegung erzeugt, und mit $\varkappa$ eine Constante, welche unter anderen die Inductionsconstante und das Leitvermögen des Dämpfers zu Factoren hat, so ist

---

[1]) Lamont im Repertorium der Physik. Berlin 1846. Bd. VII. S. LIV. — Vergl. meine Untersuchung über den Einflufs, den die temporäre Magnetisirung der einzelnen Nadeln einer astatischen Doppelnadel durch die Erde auf die Gleichgewichtslage des Systemes übt. Poggendorff's Annalen u. s. w. 1861. Bd. CXII. S. 1.

$$2\varepsilon = -\left(-\frac{\varkappa \mathfrak{m}'^2 (\iota + \gamma_i H)^2}{M}\right).$$

Durch Einsetzen dieser Werthe wird

$$r = \frac{1}{2M}\sqrt{\iota + \gamma_i H}\sqrt{\varkappa^2 \mathfrak{m}'^4 (\iota + \gamma_i H)^3 - 4m' HM}\ .$$

Bei gleicher Dämpfung wird also r um so eher $= 0$ oder reell, d. h. die Bewegung des Magnetes um so eher aperiodisch, je kleiner M, und je kleiner H. Zwar nimmt, durch Verkleinern von H, auch der erste Term unter dem Wurzelzeichen ab, doch ist γ_i so klein, dafs diese Abnahme neben der des zweiten Termen hier nicht in Betracht kommt.

Da es Gauss bei seinen Zwecken, wie wir sahen (vergl. oben S. 808), nicht daran lag, den aperiodischen Zustand herbeizuführen, so hat er nicht daran gedacht, statt durch Vergröfsern von $\varkappa \mathfrak{m}'^2$, dies durch Verkleinern von HM zu thun, wozu sich zunächst das einfache Mittel bietet, die Wirkung der Erdkraft auf den Magnet zu schwächen, und so H zu vermindern. Dazu wird im Princip jede der drei Methoden des Astasirens taugen: die Verbindung zweier Magnete zur Doppelnadel, die Aufstellung der Drehungsaxe des Magnetes in der Richtung der Inclinationsnadel, endlich das Hauy'sche Verfahren, bei dem ein verkehrt genäherter Magnetstab der Erde entgegenwirkt, aus einleuchtenden Gründen jedoch am besten die letztere Methode, deren ich mich zu meinen thierisch-elektrischen Versuchen längst ausschliefslich bediene. Bei dieser wird, wenn S die horizontale Componente der Kraft des Hauy'schen Stabes bezeichnet,

$$\varepsilon = \frac{\varkappa \mathfrak{m}'^2 \left\{\iota + \gamma_i (H - S)\right\}^2}{2M}\ , \quad . \ . \ . \ . \quad \text{(XL)}$$

$$r = \frac{1}{2M}\sqrt{\iota + \gamma_i (H - S)}\sqrt{\varkappa^2 \mathfrak{m}'^4 \left\{\iota + \gamma_i (H - S)\right\}^3 - 4m'(H - S)M}.$$

An der Wiedemann'schen Bussole, welche mit einem starken Dämpfer versehen ist[1]), gelingt es daher ohne jede

[1]) In den von Hrn. Sauerwald vortrefflich gebauten Exemplaren besteht der Dämpfer aus einem kupfernen Cylinder von 60mm Durchmesser und 30mm Länge. Dieser Cylinder ist seiner Axe nach von

Schwierigkeit, durch fortgesetzte Annäherung des von mir daran angebrachten Hauy'schen Stabes den Magnetspiegel in den aperiodischen Zustand zu versetzen. Um bequem darüber zu experimentiren, leitet man von dem Strom einer beständigen Kette mittels des Compensators [1]) einen Zweig durch die Rollen der Bussole und unterbricht den Stromzweig mittels eines Schlüssels im Bussolkreise. Indem man den Magnet stets aus der nämlichen Ablenkung ohne Anfangsgeschwindigkeit fallen läfst, sieht man zuerst in dem Mafse, wie man den Hauy'schen Stab nähert, das logarithmische Decrement wachsen. Dann kommt ein Punkt, wo zwar der Magnet noch über den Nullpunkt hinausschwingt, aber keine dritte Elongation mehr unterschieden werden kann. Die zweite Elongation wird endlich auch unmerklich, und nun ist das logarithmische Decrement unendlich geworden, und der aperiodische Zustand da. Dieser Punkt läfst sich natürlich nicht mit vollkommener Schärfe bestimmen, wegen der Schwierigkeit zu unterscheiden, ob eine rückgängige Bewegung des Magnetes um wenige Zehntel eines Scalentheiles, welche mehrere Secunden dauert, wirklich als Rückkehr zur Gleichgewichtslage aufzufassen sei. Übrigens handelt es sich hier zuletzt um ziemlich kleine Verschiebungen des Hauy'schen Stabes. Scheint der aperiodische Zustand eben erreicht und entfernt man den Stab wieder auch nur um 1^{mm} bei etwa 300^{mm} Abstand seiner Mitte von der des Spiegels, so wird bei gröfseren Fallhöhen der Nullpunkt sogleich wieder um $1-2^{sc}$ überschritten. Es wird sich daher fortan empfehlen, den Stab auch in der Richtung nach dem Magnete zu mit einer mikrometrischen Bewegung zu versehen.

Läfst man jetzt den Magnet aus sehr hohen Ablenkungen, weit über die Grenzen der Theilung hinaus, fallen, so wird

---

einer concentrischen, cylindrischen Höhlung von solcher Weite durchbohrt, dafs der 20^{mm} im Durchmesser haltende Magnet-Spiegel oder -Ring darin eben frei spielt. Vergl. übrigens Wiedemann, Die Lehre vom Galvanismus u.s.w. Braunschweig 1863. Bd. II. S. 198. §. 181.

[1]) S. meine: Beschreibung einiger Vorrichtungen und Versuchsweisen u. s. w. Aus den Abhandlungen der Akademie 1862. Berlin 1863. 4°. S. 107.

der Nullpunkt noch mehr oder weniger überschritten. Man bringt es aber, durch ferneres Annähern des Stabes, leicht dahin, dafs auch der von 90° fallende Spiegel sich schwingungslos auf den Nullpunkt einstellt. Jenes Überschreiten erklärt sich vermuthlich so, dafs bei weit über die Scale hinausgehenden Ablenkungen zwar die Richtkraft langsamer wächst als die Bögen, noch schneller aber die Dämpfung durch die cylindrische Kupferhülse abnimmt, daher der Magnet bei dem ξ, wo unsere Gesetze merklich zu gelten anfangen, mit einer Geschwindigkeit anlangt, die ihn befähigt, den Nullpunkt zu überschreiten, so lange nicht r einen gewissen Werth übertrifft (vergl. oben §. VI). Bei einer sphärischen Hülse würde aller Wahrscheinlichkeit nach kein solches Überschreiten stattfinden.

Nähert man den Stab dem Magnet immer mehr, so schlägt der Magnet um. Vorher kommt natürlich der Punkt, wo er völlig astatisch, $n = 0$ und $r = \varepsilon$ ist, wo er also durch den oben S. 814 theoretisch abgeleiteten Zustand hindurchgeht, in welchem er sich gleich einem Körper bewegt, dem das umgebende Mittel einen seiner Geschwindigkeit proportionalen Widerstand entgegensetzt. Aus Gründen, die keiner Ausführung bedürfen, vermag die Beobachtung diesen Zustand nicht zu erfassen. Darüber hinaus gehorcht die Bewegung wieder dem durch Gleichung (VII) ausgesprochenen Gesetze, um schliefslich durch den Grenzfall (XIV) hindurch von Neuem periodisch zu werden.

Wir werden im Folgenden den Begriff der B e r u h i g u n g s z e i t des Magnetes brauchen. Es ist die Zeit, welche verfliefst vom Augenblicke, wo der abgelenkte Magnet fallen gelassen wird, bis zu dem, wo seine Ablenkung unmerklich, d. h. kleiner als eine bestimmte kleine Gröfse, etwa ein Zehntel Scalentheil, wird. Die Umstände zu kennen, welche diese Zeit verkleinern, ist von praktischer Wichtigkeit. Zu wahrhaft scharfer Messung eignet sich übrigens die Beruhigungszeit nicht; namentlich bei hoher Astasie ist schwer zu sagen, wann die Bewegung ein Ende hat. Da bei gleichem t die Ablenkung des schwingungslos zum Nullpunkte zurückkehrenden Magnetes ξ proportional ist (s. oben S. 812. 813), so wächst auch die Be-

ruhigungszeit mit ξ. Der unten näher zu beschreibende Magnetspiegel I z. B. brauchte bei 298^{mm},5 Abstand des Hauy'schen Stabes, wo seine Bewegung zuerst aperiodisch schien, von $\xi = 25^{\text{sc}}$ fallend 4,2, von $\xi = 500^{\text{sc}}$ fallend 5,2 Secunden zur Beruhigung. Deutlicher wird der Unterschied bei höherer Astasie, wie sie durch Annähern des Stabes erreicht wird, und wobei, wie wir bald näher sehen werden, die Beruhigungszeit auch absolut gröfser ist. Bei 282^{mm},5; 277^{mm},5 Abstand des Stabes betrug die Beruhigungszeit des von $\xi = 25^{\text{sc}}$ fallenden Spiegels beziehlich 10,0; 20,0, die des von $\xi = 500^{\text{sc}}$ fallenden 17,6; 29,6 Secunden.

Wir kehren zu den Bedingungen zurück, unter welchen die Bewegung gedämpfter Magnete aperiodisch wird. Eine zweite Art, unter übrigens gleichen Umständen $r = 0$ oder reell zu machen, wäre nämlich die Verkleinerung des Trägheitsmomentes M. Es liegt in der Natur der Dinge, dafs man, ohne besondere Einrichtungen, diese nicht stetig und nicht am sonst fertigen Apparate vornehmen kann. Aber je kleiner M, je dünner z. B. bei sonst gleicher Gestalt ein Magnetspiegel ist, bei um so kleinerem S, d. h. bei um so geringerer Astasie wird seine Bewegung aperiodisch. Dies ist einer der Gründe, aus denen weder Gauss, noch sonst Einem der vielen Beobachter, die an gedämpften Magneten mit Spiegelablesung thätig waren, der aperiodische Zustand aufgestofsen ist, da an den nach Göttinger Vorschrift eingerichteten Magnetometern Stäbe von sehr grofsem Trägheitsmomente angewendet wurden, und man überhaupt Magnete von kleiner Masse wenig gebraucht hat, weil man die schnellere Abnahme ihrer Intensität fürchtete. Der Gebrauch leichterer Magnete empfiehlt sich aber für gewöhnlich hier deshalb, weil, ganz als ob der Magnet noch schwänge, durch Verkleinerung des Trägheitsmomentes die Beruhigungszeit des aperiodisch sich bewegenden Magnetes verkürzt wird. Setzt man in Gleichung (XIV) $\varepsilon = \frac{\alpha}{M}$, wo α eine Constante, und differenzirt man nach M, so erhält man für $\frac{dx}{dM}$ einen positiven Werth: x ist für gleiche Zeiten um so kleiner, je kleiner M.

Die Erfahrung bestätigt diesen Schlufs. Ich habe den aperiodischen Zustand bisher an drei Magneten beobachtet. Zwei davon sind kreisrunde Stahlspiegel von 20^{mm} Durchmesser, deren einer, der schon erwähnte Spiegel I, nur etwa $0^{mm},8$, der andere, III, etwa 4^{mm} dick ist; I wiegt $2^{gr},414$, III $10^{gr},994$. Der dritte Magnet, II, ist ein kreisrunder Stahlring von gleichfalls 20^{mm} äufserem Durchmesser, der gleichsam aus einem quadratischen Prisma von 2^{mm} Seite gebogen ist. Ein Schildpattstäbchen verbindet ihn mit einem dünnen Glasspiegel, dessen dünne Messingfassung sich um die Senkrechte drehen läfst. Das ganze System wiegt $2^{gr},517$; sein Trägheitsmoment hält nothwendig die Mitte zwischen dem von I und III. Zwar gehört der Ringmagnet zu einer anderen Bussole als die beiden Magnetspiegel, da aber die Dämpfer beider Bussolen wesentlich gleich sind, lassen die Beobachtungen in beiden sich wohl vergleichen. In der folgenden Tabelle ist $l = \lambda m$ das logarithmische Decrement in Briggs'schen Logarithmen, deren Modul m; $\mathfrak{T}_o$ und $\mathfrak{T}_m$ sind in Secunden die Beruhigungszeiten der Magnete beziehlich ohne Hauy'schen Stab und mit Stab; A' ist in Millimetern die Entfernung des Stabes, bei der die Bewegung aperiodisch wurde: bei dieser Bestimmung wurde in beiden Bussolen derselbe Stab angewendet.

$\xi = 450^{sc}$.

Magnet	Ohne Stab		Mit Stab, $\varepsilon = n$		A'	$\mathfrak{T}_o - \mathfrak{T}_m$
	l	$\mathfrak{T}_o$	l	$\mathfrak{T}_m$		
I	0,72	6,8	∞	5,2	298,5	1,6
II	0,45	11,2	∞	8,8	280,5	2,4
III	0,38	22,1	∞	17,5	277,0	4,6

Das logarithmische Decrement des Magnetes I ist das gröfste, welches meines Wissens bisher beobachtet wurde. Wie man sieht, wächst auch an der Grenze der periodischen und der aperiodischen Bewegung die Beruhigungszeit der Magnete schnell mit ihrem Trägheitsmoment, und in einem umgekehrten Verhältnifs zu diesem steht die Entfernung, bis zu welcher der Hauy'sche Stab genähert werden mufs, um die Schwingungslosigkeit herbeizuführen.

§. XI. Die Beruhigungszeit des gedämpften Magnetes in ihrer Abhängigkeit von dessen verschiedenen, im Vorigen betrachteten Zuständen.

Über den Einfluſs der Dämpfung auf die Beruhigungszeit des Magnetes lernten wir schon eine Andeutung von Gauss kennen. Er sagt (s. oben S. 808), daſs „die Annäherung an „den Ruhestand wieder langsamer geschieht, sobald ε den Grenz„werth n überschreitet.“ Setzt man in Gleichung (IX) oder (X) $t = NT_1$, wo N die Zahl der Schwingungen, T_1 die Schwingungsdauer des gedämpften Magnetes bedeuten, so ist

$$x_{max} = \xi . e^{-\varepsilon N T_1}$$

der Ausdruck für die mit wachsendem N abnehmenden Amplituden des von ξ fallenden Magnetes. T_1 ist $= \frac{\pi}{\sqrt{n^2 - \varepsilon^2}}$ [(XXI), S. 816], und wächst mit ε. Denkt man sich zwei solche Werthe von N und von ε, daſs $NT_1 = N'T'_1$, so wird die kleinere Amplitude zum gröſseren ε und kleineren N gehören: die Beruhigungszeit des noch schwingenden Magnetes nimmt mit wachsendem ε ab. Differenzirt man ferner Gleichung (VII) nach ε, so findet man $\frac{dx}{d\varepsilon}$ positiv für jeden Werth von $t > 0$: die Beruhigungszeit des schwingungslosen Magnetes nimmt also mit wachsendem ε zu; und somit ist die Gauss'sche Bemerkung erwiesen.

Diese Bemerkung paſst jedoch nicht auf unseren Fall. Denn während Gauss nur an ein Wachsen von ε durch Vergröſserung der dämpfenden Metallmenge dachte, verkleinern wir n, zugleich aber in geringerem Maſse ε, ohne das Verhältniſs zu kennen, in welchem letzteres geschieht. Betrachten wir zunächst den aperiodischen Zustand, und berücksichtigen wir allein die durch Verkleinern von n bewirkte Vergröſserung von r, indem wir Gleichung (VII) nach r differenziren, so ergiebt sich $\frac{dx}{dr}$ für jeden Werth von $t > 0$ als positiv. Von dem Grenzfalle $r = 0$ an also bis zu $r = \varepsilon$ wächst x für ein gegebenes t, oder es findet die Annäherung an die Ruhelage um so langsamer statt, je kleiner n, bis endlich der völlig astatische

Magnet überall stehen bleibt (vergl. oben S. 814). Berücksichtigen wir nun auch die Verkleinerung von ε, so wird zwar durch diese den Einfluſs des Wachsens von r insofern etwas vermindert, als r selber dadurch langsamer wächst. Setzen wir aber r constant, und differenziren (VII) nach ε, so ergiebt sich $\frac{dx}{d\varepsilon}$ diesmal als negativ für jeden Werth von $t > 0$. Die mit der Verkleinerung von n verbundene Verkleinerung von ε, soweit es nicht unter dem Wurzelzeichen steht, wirkt also mit jener in gleichem Sinne, d. h. vergröſsernd auf x, und demgemäſs lehrt die Erfahrung, daſs mit abnehmender Entfernung A des Hauy'schen Stabes die Beruhigungszeit schnell zunimmt. So war z. B. bei Magnet I für $\xi = 450^{sc}$ und

für $A = A' = 298{,}5$	$\mathfrak{T}_m = 5{,}2$
für $A = 293{,}5$	„ „ 8,0
„ „ „ 288,5	„ „ 12,0
„ „ „ 283,5	„ „ 16,4
„ „ „ 278,5	„ „ 24,4
„ „ „ 273,5	„ „ 40,0 ;

bei weiterer Annäherung wurde der Magnet unstet und schlug um. Bei Magnet III war

für $A = A' = 277{,}0$	$\mathfrak{T}_m = 17{,}5$
für $A = 272{,}0$	„ „ 40,0.

Darüber hinaus war keine Messung mehr ausführbar. Diese Zahlen zeigen auf's Neue, wie der leichte Spiegel schon bei geringer Astasie aperiodisch wird, während beide Spiegel bei ungefähr derselben Nähe des Stabes aufhören brauchbar zu sein; woraus sich für den leichten Spiegel ein ungleich gröſserer benutzbarer Spielraum aperiodischer Astasie ergiebt als für den schweren.

Ist die Bewegung noch periodisch, so kann man dieselbe Betrachtung anstellen, wie oben. Die abnehmenden Amplituden haben wieder zum Ausdruck

$$x = \xi . e^{-\varepsilon N T_1} = \xi . e^{-\frac{\varepsilon N \pi}{\sqrt{n^2 - \varepsilon^2}}},$$

allein der Exponent verändert sich jetzt so, daſs n kleiner wird, während auch ε, nur in viel geringerem Maſse, abnimmt. Denkt man sich wieder zwei solche Werthe von N, und von n

und ε, dafs $NT_1 = N'T'_1$, so wird diesmal die kleinere Amplitude dem gröfseren N entsprechen. Annäherung des Stabes müfste zur Folge haben, dafs der Magnet langsamer schwänge, und dafs zugleich seine Amplituden etwas langsamer abnähmen: seine Beruhigungszeit müfste durch den Einflufs des Stabes etwas gröfser werden.

So sicher dieser Schlufs erscheint, so straft ihn doch die Erfahrung Lügen. Die Spalte $\mathfrak{T}_o - \mathfrak{T}_m$ der Tabelle auf S. 837 zeigt, dafs vielmehr die Beruhigungszeit des eben schwingungslos gewordenen Magnetes um keinen geringen Bruchtheil kleiner ausfällt als die des nicht astasirten. Den Grund dieser Abweichung suche ich in dem Widerstand der Luft. Da dieser mit der Geschwindigkeit wächst, so mufs die dadurch bewirkte Verzögerung im Falle von Schwingungen gröfser sein als bei schwingungsloser Rückkehr zum Nullpunkte, gleiche Beruhigungszeit in der Luftleere und gleiche Fallhöhe vorausgesetzt. Man könnte einwenden, dafs dann der Unterschied $\mathfrak{T}_o - \mathfrak{T}_m$ bei dem schweren Spiegel verhältnifsmäfsig kleiner sein müfste als bei dem leichten, wovon eher das Gegentheil zutrifft. Allein der Hauptsitz des Luftwiderstandes ist unstreitig der ringförmige Spalt zwischen Spiegelrand und Dämpfer, und dieser Spalt ist bei dem schweren, dicken Spiegel, wenn auch nicht überall gleich eng, fünfmal so lang als bei dem leichten, dünnen Spiegel. Trotz der gleichen Gröfse und Gestalt der Flächen beider Spiegel erfährt also der dickere einen gröfseren Widerstand, und der Unterschied der Widerstände ist vermuthlich so grofs, dafs er den Unterschied der Massen überwiegt. Versuche zur Prüfung dieser Hypothese habe ich noch nicht angestellt. Wie dem auch sei, für den Gebrauch ergiebt sich, dafs der Zustand der eben eingetretenen Schwingungslosigkeit des Magnetes zugleich den Vortheil der kleinsten Beruhigungszeit gewährt, welche die angewandten Vorrichtungen gestatten.

§. XII. Bestätigung der für den Fall einer Anfangsgeschwindigkeit theoretisch gefundenen Bewegungsgesetze aperiodischer Magnete.

Läfst man auf den aperiodisch sich bewegenden Magnet einen beständigen Strom von längerer Dauer wirken, der ihn

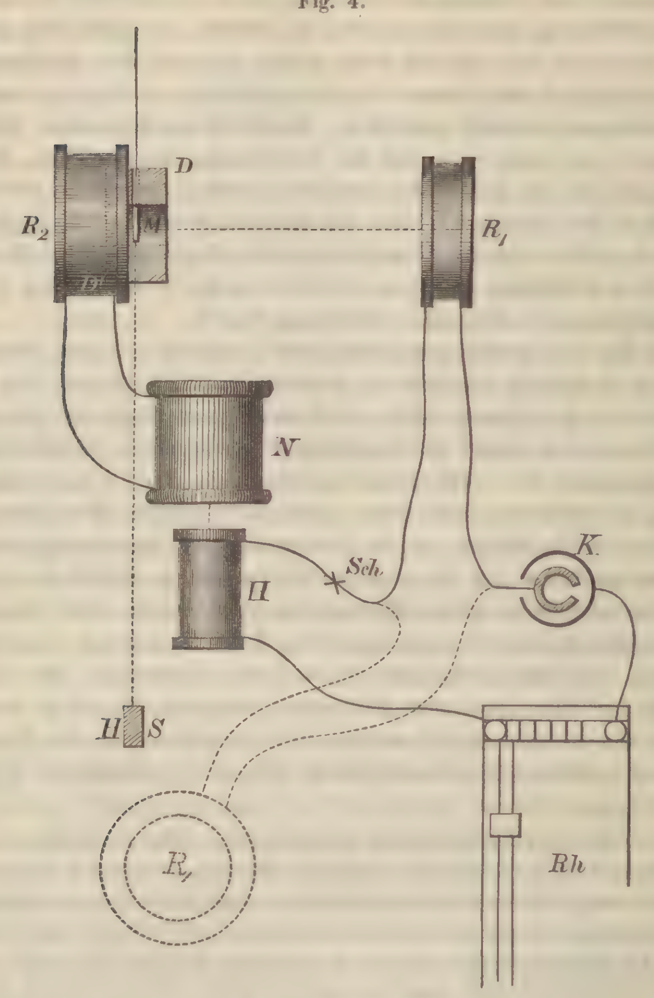
innerhalb der Grenzen der Theilung, d. h. bei 2300^{mm} Abstand der Scale vom Spiegel um etwa 7° ablenkt, so sieht man ihn in derselben Art, wie er beim Fallen sich auf den Nullpunkt begiebt, sich der neuen Gleichgewichtslage zu bewegen und schwingungslos dort einstellen. Doch ist zu bemerken, dafs wenn ε nur eben $= n$ und die Ablenkung sehr grofs ist, der Magnet sie um $2-3^{sc}$ überschreitet, obschon er von ihr herabfallend den Nullpunkt ohne Schwingung erreicht. Auch dies rührt wohl, wie das Überschreiten des Nullpunktes bei übergrofsen Fallhöhen (s. oben S. 835) von der Verminderung der Dämpfung mit steigender Ablenkung her.[1])

Um die Anfangsgeschwindigkeit c sowohl wie die Ablenkung ξ gehörig abstufen zu können, traf ich die in Fig. 4 sichtbare Anordnung. Hier ist M der Magnetspiegel an seinem Faden und in seiner im Durchschnitt gezeichneten dämpfenden Kupferhülse DD', HS der Durchschnitt des Hauy'schen Stabes, K die Grove'sche Kette, *Sch* ein Schlüssel, *Rh* ein Rheochord, H die Haupt-, N die Nebenrolle eines Schlitteninductoriums gröfserer Art, R_1 eine der Thermorollen, endlich R_2 eine der gewöhnlichen feinen Hydrorollen der Bussole. Die Theile der Anordnung, die eine merkliche Fernwirkung auf einander übten, sind durch punktirte gerade Linien verbunden. Die von Mitte zu Mitte gemessene Entfernung zwischen H und N nennen wir B. Bei geschlossenem Schlüssel *Sch* hält die Rolle R_1 den Magnet abgelenkt; durch Öffnen des Schlüssels läfst

---

[1]) Da das Überschreiten der Ablenkung nicht mehr stattfindet, wenn ε merklich $> n$, so wird es wenigstens sehr unwahrscheinlich, dafs die Erscheinung auf einer Unbeständigkeit der angewandten Grove'schen Kette beruht, woran man nach den Erfahrungen der HH. Edlund und Rijke (Poggendorff's Annalen u. s. w. 1849. Bd. LXXVII. S. 182; — 1857. Bd. CII. S. 508) über die gröfsere Stärke der Schliefsungs- im Vergleich zur Öffnungs-Induction auch bei den sogenannten beständigen Ketten deshalb hätte denken können, weil meine Hülfsmittel gestatten, durch die Ablenkung der Magnetnadel den Zustand der Kette nach der Schliefsung früher zu beobachten, als dies wohl je möglich war. Für diese Deutung liefse sich freilich noch immer sagen, dafs bei $\varepsilon > n$ die Zeit, innerhalb der die Beobachtung geschieht, vergröfsert wird (s. oben S. 839).

Fig. 4.



man den Magnet fallen, und ertheilt ihm zugleich eine Anfangsgeschwindigkeit im Sinne der Richtkraft durch den in N inducirten Nebenstrom, dem dazu die passende Richtung zu geben ist. Die Ablenkung sowohl wie der Stromstofs läfst sich auf doppelte Art regeln, jene durch das Rheochord und durch Verschieben der Rolle R_1, diese durch Verschieben der

Rollen N und R_2; abgesehen von dem Einlegen von Drähten in H, welches aus gleich zu erwähnenden Gründen zu vermeiden ist. So gelingt es leicht, eine hinlängliche Anfangsgeschwindigkeit zu erzeugen, damit auch bei $\varepsilon > n$ der Nullpunkt überschritten werde; von der jenseitigen Ablenkung kehrt der Magnet schwingungslos zum Nullpunkte zurück. Aufserdem bietet die dargestellte Anordnung auch Gelegenheit, unsere Formeln etwas schärfer auf die Probe zu stellen.

Dazu bringt man zuerst die Rolle R_1 in solche Lage, dafs der Magnet keine merkliche Wirkung mehr von ihr erfährt, wie dies in der Figur durch die punktirte Leitung und Rolle $Sch\,R_1\,K$ angedeutet ist. Die Rolle H hat gleichfalls, diese aber dauernd, solche Lage, dafs sie nicht merklich auf den Magnet wirkt. Zweitens entfernt man N von H so weit, dafs beim Schliefsen und Öffnen bei *Sch* der Spiegel unbewegt bleibt. Jetzt bringt man R_1 wieder in solche Lage, und ertheilt dem Strom durch das Rheochord solche Stärke, dafs der Spiegel bis an die Grenzen der Scale abgelenkt wird. Indem man ihn aus stets gleicher Höhe durch Öffnen bei *Sch* öfter fallen läfst, sucht man die Entfernung des Hauy'schen Stabes A' auf, bei der die Bewegung des Magnetes eben aperiodisch, oder $\varepsilon = n$ ist. Diese Entfernung mufs nach Herstellung der beschriebenen Anordnung von Neuem bestimmt werden, auch wenn ε schon früher $= n$ gemacht worden war, weil zur Dämpfung durch die Kupferhülse jetzt noch die durch die Rolle R_2 tritt, daher fortan die Rolle R_2 nicht mehr von der Stelle gerückt werden darf. Auch die Rolle R_1 erhält von hier ab, sofern sie nicht in die unwirksame Lage gebracht wird, eine unveränderliche Stellung, und die Veränderung der Ablenkung ξ wird allein mittels des Rheochords bewirkt. Dämpfung sowohl als secundäre Induction im Hauptkreise sind zwar dadurch ausgeschlossen, dafs man, der Natur der Dinge nach, mit dem Öffnungsschlage arbeitet; jene Mafsnahme hat aber ihren Grund darin, dafs die Ablenkung ξ die Stromstärke in dem Kreise $K\,R_1\,Sch\,H\,Rh\,K$ messen soll.

Sind diese Vorbereitungen getroffen, so kann man zu folgenden zwei Versuchen schreiten.

Versuch I.

Bei irgend einer, durch das Rheochord willkürlich bestimmten Ablenkung ξ nähert man die Nebenrolle zuerst der Hauptrolle soweit, dafs beim Öffnen der Kette der Magnet den Nullpunkt nur eben um die kleinste bemerkbare Gröfse überschreitet; diese Entfernung der Nebenrolle von der Hauptrolle heifse B'. Alsdann gilt sehr genau (s. oben S. 819 ff.) die Gleichung

$$c = s\xi.$$

Es ist aber in unserem Falle c sichtlich proportional ξ; denn die Elektricitätsmenge, die sich in einem voltaëlektrischen Nebenstrome abgleicht, ist der Stärke des Hauptstromes proportional[1]), und für eben dieser Stärke merklich proportional dürfen wir die Ablenkungen des Magnetes nehmen. Man hat also auch $c = a\xi$, wo a eine Constante, folglich $a = s$ unabhängig von ξ, und demgemäfs kann man, wenn einmal B' für ein beliebiges ξ gefunden ist, ξ durch das Rheochord fortan beliebig verändern: gleichviel von wo der Magnet falle, stets überschreitet er den Nullpunkt nur eben um die kleinste bemerkbare Grösse.

Es versteht sich beiläufig von selbst, und Rechnung wie Beobachtung ergeben, dafs dabei die Beruhigungszeit kleiner wird als ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Versuch II.

Nachdem dieser Zustand erreicht ist, bringt man, bei einem beliebigen ξ, R_1 in die unwirksame, in der Figur punktirte Lage, und wiederholt den Versuch. Jetzt trifft der Inductionsstofs, der vorher den Magnet bei ξ traf, den Magnet auf dem Nullpunkt; es erfolgt ein Ausschlag im umgekehrten Sinne von der Ablenkung ξ; die Gröfse dieses Ausschlages heisse x. Man hat

---

[1]) Es dürfen sich deshalb keine Drähte in der Hauptrolle befinden. Versuche, die ich in dieser Art mit einem kleineren Schlitteninductorium angestellt hatte, mufsten verworfen werden, indem sich dabei von dem erwarteten, und wie man sehen wird, richtigen Gesetze Abweichungen ergaben, welche sich aus der Annahme erklären liefsen, dafs die in den Inductionsströmen sich abgleichenden Elektricitätsmengen schneller wuchsen als die Stärken der inducirenden Ströme. Vergl. Wiedemann, Die Lehre vom Galvanismus u. s. w. Braunschweig 1863. Bd. II. S. 297.

$$x = x_{max} = \frac{c}{\varepsilon e}$$

[(XXXIV), S. 828]. Abermals ist c proportional ξ, also $\xi =$ const $\times$ x, gleichviel wie ξ gewählt wird.

Die folgenden Tabellen zeigen das Ergebniſs der Versuche, die ich zur Prüfung dieses Schlusses anstellte. Die Zahlen ξ_c in der ersten Spalte jeder Tabelle sind erhalten, indem ich mittels des Rheochords die Ablenkung von 25^{sc} bis 500^{sc} stets um 25^{sc} steigerte; sie sind das Mittel aus zwei Ablesungen vor und nach zehn Ablesungen von x_b; die abgelesenen Tangenten der doppelten Ablenkung sind in die doppelten Tangenten der einfachen Ablenkung verwandelt. Die Zahlen x_{mc} sind das ebenso corrigirte Mittel aus jenen zehn x_b; die Spalte $x_m - x_b$ zeigt die gröſste, positive oder negative Abweichung des beobachteten nicht corrigirten x_b vom mittleren nicht corrigirten x_m, welche in einem solchen Satze vorkam. Man sieht, daſs diese Abweichung sich höchstens auf $0^{sc},85$ beläuft. Die Constante ist nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet; die Zahlen x_r sind durch Division von ξ_c mit der Constanten erhalten. Obschon x bis zu 183^{sc} hinaufgeht, belaufen sich die Abweichungen $x_r - x_{mc}$ nie auf mehr als den Bruchtheil eines Scalentheiles, mit einer einzigen Ausnahme (Versuch 15 in Tab. 1), wo ein gröſserer Fehler durch irgend einen Zufall begangen wurde, wie er bei einer Versuchsreihe, die sich über viele Stunden erstreckt, wohl vorkommen kann. Erwägt man die Fehler der gedruckten Theilung, die Unbeständigkeit der Kette und die Erwärmung der Drähte, die Schwankungen der Ruhelage des Magnetes und der Länge des ihn tragenden Fadens, die mangelhafte Einstellung des Fernrohrs bei gröſseren Ablenkungen und die Schwierigkeit des Ablesens gröſserer Ausschläge, den Widerstand der Luft, endlich die unsichere Aufstellung meiner Apparate in dafür ganz ungeeigneten Räumen, so darf die erlangte Übereinstimmung gewiſs für höchst befriedigend gelten. Die Regelmäſsigkeit in der Vertheilung der Zeichen der Fehler, wonach die gröſseren x_{mc} im Allgemeinen zu klein sind, rührt wohl davon her, daſs die Ablenkungen nicht unserer Voraussetzung entsprechend den Stromstärken genau proportional sind,

Tabelle I. $A' = 296^{\text{mm}}.5$, $B' = 47^{\text{mm}}$

	ξ_c	x_{mc}	$x_m - x_b$	x_r	$x_r - x_{mc}$
1	25.00	9.30	0.00	9.27	—0.03
2	49.99	18.67	—0.60	18.53	—0.14
3	75.10	27.94	—0.14	27.84	—0.10
4	99.95	37.30	+0.30	37.04	—0.25
5	125.10	46.80	±0.20	46.36	—0.43
6	150.19	56.23	+0.45	55.67	—0.57
7	175.25	65.24	±0.25	64.95	—0.29
8	199.60	74.70	+0.22	73.98	—0.72
9	225.46	83.73	+0.35	83.56	—0.17
10	249.26	92.89	0.00	92.38	—0.51
11	275.52	102.06	—0.19	101.74	—0.32
12	300.20	111.64	—0.85	111.26	—0.38
13	324.63	120.96	—0.56	120.32	—0.64
14	349.77	129.20	±0.50	129.63	+0.44
15	370.46	135.99	—0.23	137.30	+1.31
16	397.02	146.82	+0.17	147.15	+0.33
17	421.86	156.42	+0.47	156.35	—0.06
18	447.28	165.88	—0.55	165.78	—0.11
19	470.91	174.05	±0.70	174.53	+0.48
20	494.47	183.21	±0.50	183.27	+0.06

Const = 2.698120

Tabelle II. $A' = 297^{\text{mm}}.5$; $B' = 52^{\text{mm}}$

	ξ_c	x_{mc}	$x_m - x_b$	x_r	$x_r - x_{mc}$
1	25.00	9.00	0.00	8.90	—0.10
2	50.50	17.92	+0.12	17.98	+0.06
3	75.20	27.00	0.00	26.77	—0.23
4	99.65	35.42	+0.38	35.47	+0.06
5	124.91	44.66	+0.16	44.46	—0.19
6	149.67	53.30	—0.38	53.28	—0.02
7	174.45	62.75	+0.46	62.10	—0.65
8	199.47	71.67	+0.60	71.01	—0.66
9	224.99	80.38	—0.53	80.09	—0.28
10	249.11	89.05	+0.28	88.68	—0.37
11	274.39	98.01	±0.26	97.68	—0.33
12	299.48	106.85	+0.71	106.61	—0.24
13	324.70	116.09	±0.85	115.59	—0.50
14	349.28	125.01	±0.26	124.34	—0.67
15	372.79	132.87	—0.22	132.71	—0.16
16	398.64	141.69	+0.52	141.91	+0.22
17	422.22	149.63	+0.38	150.30	+0.67
18	447.48	159.22	+0.50	159.29	+0.08
19	469.57	166.56	+0.78	167.15	+0.59
20	493.07	174.77	±0.20	175.52	+0.76

Const = 2.809127

sondern ein etwas abweichendes, und zwar für die beiden Rollen R_1 und R_2, wegen ihrer verschiedenen Entfernung vom Spiegel, verschiedenes Gesetz befolgen. Nicht einmal die Richtkraft verändert sich genau proportional dem Sinus der Ablenkung, weil der Hauy'sche Stab, wenn auch um beinahe 300mm entfernt, den Magnet doch nicht mit strenge parallelen Kräften angreift.

Wir wollen jetzt noch der Constanten selber in unserer durch den Versuch bewiesenen Gleichung $\xi = \text{const} \times \text{x}$ unsere Aufmerksamkeit zuwenden. Aus $c = \varepsilon \xi$ und $\text{x} = \frac{c}{\varepsilon e}$ folgt const $= e$, und man hat also die merkwürdige Beziehung

$$\frac{\xi}{\text{x}} = e\,.$$

Würde $\xi = e^2$ gemacht, so müfste sich $\text{x} = e$ ergeben; man würde unmittelbar die Basis der natürlichen Logarithmen ablesen. Dies bestätigt sich in der That.

In unserer Versuchsreihe I ist die Constante $= 2{,}69812$,
in Reihe II ist sie $= 2{,}80913$;
Mittel $= 2{,}75362$.
Es ist $e = 2{,}71828$;
der Fehler des Mittels ist also nur $= 0{,}03534$.

ε^2 ist 7,3890; wählt man als Einheit das Centimeter $= 10^{sc}$, und macht man $\xi = 7{,}39$, so mufs $\text{x} = 2{,}72$ sein.[1]) Ich stellte eine Anzahl solcher Prüfungen an, indem ich jedesmal von Neuem A' und das zugehörige B' bestimmte. Die Ergebnisse dieser Versuche, nach abnehmenden Entfernungen des Hauy'schen Stabes geordnet, zeigt folgende Tabelle in den Versuchen 1—4; Versuch 5 und 6, wo der Stab absichtlich zu nah war, wurden hinzugefügt, um das in der Reihe sich kundgebende Gesetz noch deutlicher hervortreten zu lassen.

---

[1]) Da man die Tangente der doppelten Ablenkung abliest, ist eigentlich $\xi = 7{,}39095$ zu machen, und sollte $\text{x} = 2{,}71838$ sein, doch fällt der Unterschied, wie nicht bemerkt zu werden braucht, weit innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler.

Nr.	A'	B'	x	const
1	298,5	63	2,26	3,270
2	297,5	53	2,63	2,810
3	297,0	48	**2,72**	**2,717**
4	296,5	46	2,74	2,700
	A			
5	295,0	28	3,12	2,369
6	293,5	4	3,53	2,094

Bei den Versuchen 2 und 4 hatte ich fast genau die Bedingungen der in Tabelle II und I enthaltenen Versuchsreihen wieder getroffen. Man sieht, dafs ich von dem äufsersten Werthe von A, wo mir schien, als sei die Bewegung aperiodisch, den Stab nur um anderthalb Millimeter mehr, d. h. um $\frac{1}{199}$ seines Abstandes, zu nähern hatte, um das theoretisch vorhergesehene Ergebnifs zu erhalten. Erwägt man, dafs bei diesen Versuchen die oben S. 834 besprochene Schwierigkeit zu sagen, ob der Nullpunkt noch überschritten werde oder nicht, zweimal auftritt, zuerst bei der Bestimmung von A', dann bei der von B', so wird man die erlangte Übereinstimmung gewifs als genügend anerkennen.

Die Tabelle zeigt, dafs je kleiner A, oder je näher der Stab dem Magnete, um so gröfser fällt x, und um so kleiner B' und die Constante aus. Der Sinn hiervon ist, dafs je weniger Richtkraft dem Magnete gelassen ist, um so gröfser kann die ihm ertheilte Anfangsgeschwindigkeit sein, ohne dafs er den Nullpunkt überschreitet.

Dieser Zusammenhang spricht sich deutlicher aus, wenn man, anstatt A und B zugleich, nur die eine oder die andere Entfernung ändert. Läfst man $A = A'$ beständig, und verkleinert B, so wird bald der Nullpunkt merklich überschritten, x wächst, die Constante nimmt ab. Verwickelter ist der Vorgang, wenn man $B = B'$ beständig läfst, und A ändert. Wegen $x = \frac{c}{\varepsilon e}$ (XXXIV) ist zwar x von A nur insofern abhängig, als mit A Intensität des Magnetes, folglich auch Dämpfung und, obschon der Inductionsstofs derselbe bleibt, Anfangsgeschwindigkeit sich ein wenig ändern; allein dies ist nicht zu vernachläfsigen. Für $I\tau$ in dem oben S. 827 (XXX) gegebenen Ausdruck

$$c = \frac{\mu I \tau}{M}$$

wollen wir P setzen, welches den Integralwerth des Inductionsstromes nach Stärke und Zeit vorstellen soll. Den Werth von μ entwickeln wir, wie wir dies oben S. 832 mit m und $\mathfrak{m}$ gethan haben, zu $\mu'\{\iota + \eta(H - S)\}$. Dann ist $c = \mu'\{\iota + \eta(H - S)\} \cdot \frac{P}{M}$. Es ist (XL)

$$\varepsilon = \frac{\varkappa\, \mathfrak{m}'^2 \{\iota + \eta(H - S)\}^2}{2M},$$

und folglich

$$\text{x} = \frac{c}{e\varepsilon} = \frac{2\mu'.P}{e\varkappa\, \mathfrak{m}'^2 \{\iota + \eta(H - S)\}}$$

Wenn man also, bei beständigem $B = B'$, A von A' aus vergröfsert, wird x wegen des abnehmenden S etwas kleiner, und der Nullpunkt überschritten. Umgekehrt der Nullpunkt wird nur eben erreicht, und x wächst um ein Geringes, wenn A von A' aus verkleinert wird. Dies trifft im Versuch ein; als ich bei $B' = 48^{\text{mm}}$ A von $A' = 297^{\text{mm}}$ folgweise auf 292; 287; 277^{mm} verkleinerte, stieg x von dem ihm willkürlich ertheilten Werthe $40^{\text{sc}}{,}3$ beziehlich auf nur 41,2; 42,7; $46^{\text{sc}}{,}5$.

Übrigens ist zu bemerken, dafs das c in unserem Versuch II (s. oben S. 845) dem c in Versuch I nicht genau gleich ist. Denn in Versuch I, wo man $c = \varepsilon\xi$ macht, wird der Inductionsstofs erzeugt nicht allein durch die Induction von H auf N, sondern auch durch die Induction von R_1 auf R_2 und auf den Dämpfer, welche in R_2 und dem Dämpfer die verkehrte Richtung hat von dem durch die Induction von H auf N in R_2 erzeugten Strome. Man kann also setzen $c = \varepsilon\xi = \{p - (q+s)\}\xi$, wo p, q, s die Geschwindigkeiten sind, welche, für die Einheit der die Stärke des inducirenden Stromes messenden Ablenkung ξ, die beziehlich von H auf N, von R_1 auf R_2, und von R_1 auf den Dämpfer ausgeübten Inductionen dem Magnet ertheilen. In Versuch II dagegen erhält der Magnet die Geschwindigkeit $c' = p\xi$, und man hat somit statt

$$\frac{\xi}{x} = e \text{ , vielmehr } \frac{\xi}{x} = e\left(1 - \frac{q+s}{p}\right),$$

d. h. die Constante mufs kleiner als e ausfallen.

Indessen geht aus den Umständen des Versuches hervor, dafs der Bruch $\frac{q+s}{p}$ nur sehr klein sein konnte. Die Rolle H hat mehrere hundert, die Rolle N 9845 Windungen, während R_1 nur 53 und R_2 nur 6000 Windungen besitzt. B' war bei dem Versuch 3 der letzten Tabelle, wo sich const $= e$ ergab, $= 48^{mm}$, während von Mitte zu Mitte gemessen der horizontale Abstand zwischen R_1 und R_2 400, zwischen R_1 und dem Dämpfer 380^{mm} betrug. Die Axen von R_1 und die von R_2 und dem Dämpfer lagen aber nicht einmal, wie in der Figur, in einer Geraden, sondern waren einander parallel um etwa 110^{mm} verschoben. Das Potential der Rollen R_1 und R_2, und das der Rolle R_1 und des Dämpfers aufeinander, mufsten also gegen das Potential der Rollen H und N aufeinander nahe verschwinden.

Für die Induction von R_1 auf R_2 ist dies leicht zu zeigen. Dazu wird in den Kreis von N und R_2 eine dritte Rolle R_3 von gleicher Beschaffenheit mit R_2 (die andere Hydrorolle der Bussole) aufgenommen, und gegenüber der Rolle R_1 in deren unwirksamer Lage so aufgestellt, wie R_2 gegenüber derselben Rolle in deren wirksamer Lage aufgestellt ist. Indem man für ein bestimmtes B und ξ die Induction von H auf N mit und ohne Rolle R_3, dann die Induction von R_1 auf R_3 beobachtet, hat man alle Daten, um q als ζp, wo ζ eine Constante, auszudrücken. Es fand sich aber, dafs auch bei der gröfsten inducirenden Stromstärke, welche die Anordnung zuliefs, d. h. bei völlig gestöpseltem Rheochord, q neben p unwahrnehmbar blieb. Was s betrifft, so läfst sich dies nicht experimentell bestimmen, doch kann man sicher schliefsen, dafs, obschon gröfser als q, s in Bezug auf p mit q von gleicher Ordnung sei. Der Bruch $\frac{q+s}{p}$ mufste also, wie auch aus der Übereinstimmung unserer Ergebnisse mit der Theorie folgt, nahe $= 0$ sein.

§. XIII. Vorzüge der Beobachtung an aperiodischen Magneten.

Man erreicht mittels des hier beschriebenen Verfahrens vollständiger, bequemer und ohne alle Nachtheile dasselbe, was frühere Experimentatoren, Mohr,[1]) Schilling von Canstadt und Lenz,[2]) Draper,[3]) sich vorsetzten, als sie an die nach unten verlängerte Axe des Magnetes Flügel von Platin oder Stanniol hefteten, welche in Öl oder Wasser einen die Schwingungen hemmenden Widerstand erfuhren. Keiner, der einmal am aperiodischen Magnete beobachtet hat, wird ohne besondere Gründe zum schwingenden Magnete zurückkehren, und die klare und ruhige Spiegelung der Vorgänge im Multiplicatorkreise, welche jener gewährt, für das verwirrende Schau spiel des bei jeder Veränderung der Stromstärke hin- und herschiefsenden Scalenbildes wieder aufgeben, aus dem sich der Sachverhalt stets erst nach lästiger Ungewifsheit entwickelt. Indem man mit der Verminderung der Richtkraft möglichst genau da stehen bleibt, wo $n = \varepsilon$, oder die Bewegung des Magnetes eben aperiodisch geworden ist, geniefst man, wie schon bemerkt, zugleich den Vortheil der schnellsten Beruhigung des Magnetes, welche die angewandten Vorrichtungen gestatten. Von ganz besonderem Nutzen ist der aperiodische Zustand bei dem Compensiren des Stromes zum Zwecke der Messung der elektromotorischen Kraft nach der Poggendorff'schen, von mir abgeänderten Methode, oder des Widerstandes mittels der Wheatstone'schen Brücke. Der schwingende Magnet geräth in Schwankungen, sobald man die Gleichgewichtslage schneller, als der Magnet zu folgen vermag, vor ihm her dem Nullpunkte zu bewegt; der schwingungslose Magnet kann höchstens unter den oben S. 831 bezeichneten Umständen Einen Hin- und Hergang machen, so dafs man ohne jedes Tasten, mit stetiger Bewegung, den Nullpunkt auf den Faden einstellen kann. Gute

---

[1]) Poggendorff's Annalen u. s. w. 1836. Bd. XXXIX. S. 131.

[2]) Ebendas. 1843. Bd. LIX. S. 207; — 1849. Bd. LXXVI. S. 499. S. 500.

[3]) Philosophical Magazine etc. 1839. 3rd Ser. vol. XV. p. 266.

Dienste wird auch diese Methode leisten bei Demonstrationsversuchen vor einer gröfseren Versammlung, unter Anwendung des von mir beschriebenen Verfahrens, die Ablenkungen durch einen vom Spiegel zurückgeworfenen Lichtstrahl sichtbar zu machen.[1]) Dies Verfahren wurde bekanntlich von Hrn. William Thomson angewandt, um die schwachen Signale des ersten atlantischen Kabels bequem zu beobachten, und noch heute werden die atlantischen Kabel mit sogenannten Thomson'schen Galvanometern bedient, an denen die Ablesung auf jene, zuerst von mir in England gezeigte Art geschieht. Hier, wie überhaupt wo in der Telegraphie Galvanometer in Gebrauch sind, wird die Beseitigung der Schwingungen sich als höchst vortheilhaft erweisen.

Nützlich können endlich in ihrer überraschenden Einfachheit die Formeln (XXXIII) und (XXXIV) werden. Letztere kann an sich dienen, den Integralwerth kurz dauernder Ströme relativ zu bestimmen. Aber auch zur Messung kleiner Zeiträume nach der von Hrn. Helmholtz verbesserten Pouillet'schen Methode[2]) bieten jene Formeln bequeme Gelegenheit, wenigstens wenn man sich eines Magnetes von solchem Trägheitsmomente bedient, dafs er eine scharfe Messung von

$$t = t_{max} = \frac{1}{\varepsilon}$$

zuläfst. Ist F die Ablenkung durch den zeitmessenden Strom in beständiger Gröfse, x der Ausschlag durch denselben Strom während der kleinen Zeit τ, so findet man für diese leicht den Ausdruck

$$\tau = \frac{et}{F} \cdot x .$$

---

[1]) Poggendorff's Annalen u. s. w. 1855. Bd. XCV. S. 607; — Philosophical Magazine etc. 1856. 4th Ser. vol. XI. p. 109.

[2]) Joh. Müller's Archiv für Anatomie u. s. w. 1850. S. 299; — Wiedemann, Die Lehre vom Galvanismus u. s. w. Braunschweig 1863. Bd. II. S. 236. §. 212.